BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 283

Conception : HEC Paris – ESCP Europe

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES II

Mercredi 3 mai 2017, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout le problème :

- toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$;
- on note θ un paramètre réel.

Partie I. Une démonstration probabiliste de la formule de Stirling

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit h_n la fonction définie par : $\forall x \in [0,1]$, $h_n(x) = \big((1-x)\,\mathrm{e}^x\big)^n$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 h_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1.a) À l'aide du changement de variable $u = n(1-x)$, montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ I_n = \dfrac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}} \displaystyle\int_0^n u^n \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $x + \ln(1-x) \leqslant -\dfrac{x^2}{2}$.

c) En se référant à une densité de la loi normale centrée réduite, en déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

2. On note h_n^* la restriction à l'intervalle $]0,1[$ de la fonction h_n.

On pose pour tout $x \in]0,1[$: $h_n^*(x) = \exp\left(-\dfrac{nx^2}{2}\,H(x)\right)$ et $g(x) = (1-x)\ln(1-x) + x - \dfrac{x^2}{2}$.

a) Montrer que H est prolongeable par continuité en 0. On note encore H la fonction ainsi prolongée.

b) Montrer que la fonction g est convexe et strictement positive sur $]0,1[$.

c) En déduire que la fonction H réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ sur $[1,+\infty[$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite convergente de limite nulle telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\sqrt{n} = +\infty$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ 0 < u_n < 1$.

a) Donner un exemple d'une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ v_n = H(u_n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

Tournez la page S.V.P.

c) Établir pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'encadrement : $I_n \geqslant \int_0^{u_n} h_n(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{\sqrt{n v_n}} \int_0^{u_n\sqrt{n v_n}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y$.

d) Déduire des questions 1.c) et 3.c), un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Soit $(T_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$.

a) Rappeler la loi suivie par la variable aléatoire S_n et montrer que $\lim_{n\to+\infty} P([S_n \leqslant n]) = \frac{1}{2}$.

b) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $U_n = \frac{T_{n+1}}{\sqrt{n}}$. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers la constante 0.

c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} P([S_{n+1} \leqslant n]) = \frac{1}{2}$.

5. Montrer que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n \,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$ (*formule de Stirling*).

Partie II. Quelques propriétés de la loi de Cauchy

6. *On rappelle* que la fonction Arctan est la fonction réciproque de la restriction à l'intervalle ouvert $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tan, qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ admettant pour dérivée la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et qu'elle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a) Montrer que la fonction Arctan est impaire.

b) Justifier l'existence d'un développement limité à l'ordre 3 de la fonction Arctan en 0 et le déterminer.

c) Établir pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, l'encadrement : $0 \leqslant \mathrm{Arctan}(x) \leqslant x$.

d) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a : $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

7.a) Montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+(x-\theta)^2}$ est une densité de probabilité sur $\mathbf{R}$.

Dans toute la suite du problème, on note X une variable aléatoire à valeurs réelles, de densité f_X telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_X(x) = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+(x-\theta)^2}.$$

On dit que X *suit une loi de Cauchy de paramètre* θ et on note : $X \hookrightarrow \mathcal{C}_\theta$.

b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

c) Pour $\theta = 0$, tracer la courbe représentative de f_X dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

8.a) On note F_X la fonction de répartition de X. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, calculer $F_X(x)$.

b) Montrer que l'équation $F_X(x) = \frac{1}{2}$ d'inconnue x, admet une unique solution que l'on déterminera. Cette solution est la *médiane théorique de* X.

Partie III. La loi de la moyenne empirique

9. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, soit $\varphi_{n,x}$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \varphi_{n,x}(t) = \frac{1}{(1+t^2)\big(1+(x-nt)^2\big)}.$$

On admet l'existence d'un unique quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de réels indépendants de t pour lesquels on a :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \varphi_{n,x}(t) = \frac{\alpha\, t + \beta}{1+t^2} + \frac{\gamma\, t + \delta}{1+(x-n\,t)^2}.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose : $\sigma_{n,x} = \big(x^2 + (n+1)^2\big)\big(x^2 + (n-1)^2\big)$.

On admet sans démonstration que : $\alpha = \dfrac{2\,n\,x}{\sigma_{n,x}}$, $\quad \beta = \dfrac{1 + x^2 - n^2}{\sigma_{n,x}}$, $\quad \gamma = -\dfrac{2\,n^3\,x}{\sigma_{n,x}}$, $\quad \delta = \dfrac{n^2(3\,x^2 + n^2 - 1)}{\sigma_{n,x}}$.

a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t)\,\mathrm{d}t$.

b) À l'aide d'une primitive de la fonction $\psi_{n,x} : t \longmapsto \dfrac{2\,t}{1+t^2} - \dfrac{2\,n(n\,t - x)}{1+(x-n\,t)^2}$, montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{n,x}(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

c) Établir la relation : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(n+1)\,\pi}{x^2 + (n+1)^2}$.

10. On pose : $Y = X - \theta$. Pour n entier de $\mathbf{N}^*$, soit $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi que Y.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$ et $\overline{Y_n} = \dfrac{S_n}{n}$ (*moyenne empirique de l'échantillon* $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$).

a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y. Quelle est la loi de Y ?

b) Quelle est la fonction de répartition de S_2 ? En déduire la loi de $\overline{Y_2}$.

c) Déterminer pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la loi de la variable aléatoire $\overline{Y_n}$.

d) La loi faible des grands nombres s'applique-t-elle à la suite $\left(\overline{Y_n}\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$? Pourquoi ?

11. Soit $(N, n) \in \mathbf{N}^{*2}$. On veut simuler N réalisations de la moyenne empirique $\overline{Y_n}$.

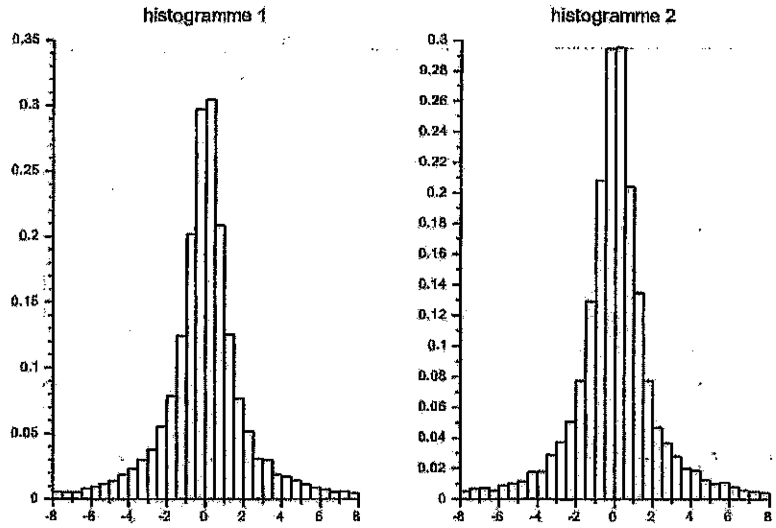
On suppose que l'on connaît une fonction *Scilab* `cauchy` telle que la commande `A=cauchy(N,n)` retourne une matrice $A \in \mathcal{M}_{N,n}(\mathbf{R})$, réalisation d'une famille $\left(Y_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant N \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{C}_0$.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{N,n}(\mathbf{R})$ avec $(N, n) \in \mathbf{N}^{*2}$. *On rappelle que dans le langage Scilab* :

- la commande `sum(M)` retourne une matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbf{R})$ contenant la somme de tous les éléments de M ;
- la commande `sum(M,'r')` retourne un vecteur ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ contenant les sommes des éléments de M calculées colonne par colonne ;
- la commande `sum(M,'c')` retourne un vecteur colonne de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbf{R})$ contenant les sommes des éléments de M calculées ligne par ligne ;
- la commande `linspace(a,b,m)` retourne un vecteur ligne de m valeurs régulièrement espacées entre a et b et l'on obtient le même vecteur avec la commande `(a :`ℓ` :b)` en prenant $\ell = \dfrac{b-a}{m-1}$;
- la commande `histplot(y,data)` permet de représenter les éléments du vecteur `data` sous la forme d'un histogramme ; les classes de l'histogramme sont définies par le vecteur strictement croissant `y` : si ce vecteur contient m éléments `y(1), y(2), ... y(m)` tels que `y(1)< y(2)< ···< y(m)`, alors la première classe de l'histogramme est l'intervalle `[y(1), y(2)]` et les autres classes sont les intervalles `]y(i), y(i+1)]` pour $2 \leqslant i \leqslant m$.

a) Compléter le programme suivant afin que la matrice `MoyEmp` contienne 12000 réalisations de la moyenne empirique $\overline{Y_{200}}$.

```
N=12000 ;n=200 ;
A=cauchy(N,n)
MoyEmp= ........
x=(-8 : 0.5 : 8)
histplot(x,MoyEmp) \\ histogramme 1
histplot(x,A(:,1)) \\ histogramme 2
```



b) Les histogrammes 1 et 2 ont été obtenus à l'aide de ce programme. Expliquer en quoi ce couple d'histogrammes illustre le résultat de la question 10.c).

Partie IV. La loi de la médiane empirique

Dans les questions 13, 14 et 15, on suppose que le paramètre θ est inconnu.

On rappelle que $X \hookrightarrow \mathcal{C}_\theta$. Pour n entier de $\mathbf{N}^*$, on note $(X_1, X_2, \ldots, X_{2n+1})$ un $(2n+1)$-échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.

On admet l'existence de $(2n+1)$ fonctions $g_1, g_2, \ldots, g_{2n+1}$ continues sur $\mathbf{R}^{2n+1}$ à valeurs réelles, telles que les variables aléatoires réelles $\widehat{X}_1, \widehat{X}_2, \ldots, \widehat{X}_{2n+1}$ définies par : $\forall k \in [\![1, 2n+1]\!]$, $\widehat{X}_k = g_k(X_1, X_2, \ldots, X_{2n+1})$ soient des variables aléatoires à densité et que pour tout $\omega \in \Omega$, les réels $\widehat{X}_1(\omega), \widehat{X}_2(\omega), \ldots, \widehat{X}_{2n+1}(\omega)$ soient un réarrangement par ordre croissant de $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_{2n+1}(\omega)$: $\forall \omega \in \Omega$, $\widehat{X}_1(\omega) \leqslant \widehat{X}_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant \widehat{X}_{2n+1}(\omega)$.

En particulier, la variable aléatoire $\widehat{X}_{n+1}$ est la *médiane empirique de l'échantillon* $(X_1, X_2, \ldots, X_{2n+1})$.

12. Pour tout $h \in \mathbf{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on note Z la variable aléatoire discrète définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \mathrm{Card}\left\{i \in [\![1, 2n+1]\!];\ x < X_i(\omega) < x+h\right\}.$$

On note A et B les deux événements suivants : $A = \left[x < \widehat{X}_{n+1} \leqslant x+h\right]$ et $B = A \cap [Z = 1]$.

a) Établir la relation : $P(B) = (n+1)\dbinom{2n+1}{n}\left(F_X(x)\right)^n\left(F_X(x+h) - F_X(x)\right)\left(1 - F_X(x+h)\right)^n$.

b) On suppose que le réel x est fixé. Montrer qu'il existe un réel K indépendant de h pour lequel on a :

$$0 \leqslant P(A) - P(B) \leqslant K\left(F_X(x+h) - F_X(x)\right)^2.$$

c) Montrer que $\widehat{X}_{n+1}$ admet une densité $f_{\widehat{X}_{n+1}}$ donnée par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_{\widehat{X}_{n+1}}(x) = (n+1)\binom{2n+1}{n}\left(F_X(x)\right)^n\left(1 - F_X(x)\right)^n f_X(x).$$

13.a) Établir l'équivalence suivante : $x\, f_{\widehat{X}_{n+1}}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} (n+1)\dbinom{2n+1}{n}\dfrac{1}{\pi^{n+1}} \times \dfrac{1}{x^{n+1}}$.

b) En déduire l'existence de l'espérance $E(\widehat{X}_{n+1})$ de la variable aléatoire $\widehat{X}_{n+1}$.

c) Justifier que $\widehat{X}_{n+1}$ est un estimateur du paramètre θ. Calculer $E(\widehat{X}_{n+1} - \theta)$. Conclure.

d) À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur n, la variable aléatoire $\widehat{X}_{n+1}$ admet-elle une variance ?

14. On note $F_{\widehat{X}_{n+1}}$ la fonction de répartition de $\widehat{X}_{n+1}$. Soit ε un réel strictement positif.

a) Établir la relation : $\forall t \in \mathbf{R},\ f_{\widehat{X}_{n+1}}(2\theta - t) = f_{\widehat{X}_{n+1}}(t)$. En déduire que $P([|\widehat{X}_{n+1} - \theta| \geqslant \varepsilon]) = 2\,F_{\widehat{X}_{n+1}}(\theta - \varepsilon)$.

b) Montrer que la suite d'estimateurs $\left(\widehat{X}_{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en probabilité vers θ.

c) La suite $\left(\widehat{X}_{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge-t-elle en loi vers la variable certaine θ ?

15. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose : $W_{n+1} = \dfrac{2\sqrt{2n+1}}{\pi}(\widehat{X}_{n+1} - \theta)$.

a) On note $f_{W_{n+1}}$ la densité continue sur $\mathbf{R}$ de W_{n+1}. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_{W_{n+1}}(x) = \frac{n+1}{2\sqrt{2n+1}}\binom{2n+1}{n}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}}\right)\right)^2\right]^n \times \left(1 + \frac{\pi^2 x^2}{4(2n+1)}\right)^{-1}.$$

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_{W_{n+1}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

On admet que ce résultat implique la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $\left(W_{n+1}\right)_{n\geqslant 2}$ vers une variable aléatoire T qui suit la loi normale centrée réduite.

c) On note Φ la fonction de répartition de T. Soit α un réel vérifiant $0 < \alpha < 1$; on pose : $t_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Déterminer un intervalle de confiance asymptotique pour θ, centré sur $\widehat{X}_{n+1}$, au niveau de confiance $1 - \alpha$.

16. Dans le langage *Scilab*, la fonction `gsort` permet de trier les éléments d'une matrice réelle A :

- la commande `gsort(A,'r')` renvoie une copie de A triée colonne par colonne, par ordre décroissant (chaque colonne est triée indépendamment des autres) ;
- la commande `gsort(A,'c')` renvoie une copie de A triée ligne par ligne, par ordre décroissant (chaque ligne est triée indépendamment des autres).

On suppose que $\theta = 0$ et on considère p réalisations ($p \geqslant 10^4$) du $(2\,n+1)$-échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_{2n+1})$. Recopier et compléter le code suivant afin que son exécution retourne un vecteur `MedianeEmp` de p réalisations de la médiane empirique $\widehat{X}_{n+1}$, puis un vecteur `W` de p réalisations de W_{n+1}.

```
A=cauchy(p,2*n+1)
S=gsort ..........
MedianeEmp= .........
W= .........
```

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2017

ESCP-HEC VOIE SCIENTIFIQUE

CORRIGE

Partie I : une démonstration probabiliste de la formule de Stirling.

1–a)

Posons $u = n(1-x)$; $du = -ndx$; $x = \frac{n-u}{n}$.

$I_n = -\frac{1}{n}\int_n^0 \Big(\frac{u}{n}\exp(\frac{n-u}{n})\Big)^n du = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{u^n}{n^n}\exp(n-u)du.$

$$\boxed{I_n = \frac{e^n}{n^{n+1}}\int_0^n u^n e^{-u}du}$$

b)

Soit $h(x) = x + \ln(1-x) + \frac{x^2}{2}$ pour $x \in [0,1[$. La fonction h est dérivable sur $[0,1[$;

$\forall x \in [0,1[,\ h'(x) = \quad 1 - \frac{1}{1-x} + x = \frac{-x^2}{1-x} \leq 0$

La fonction h est décroissante, $h(0) = 0$, donc $h(x) \leq 0$.

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ \ x + \ln(1-x) \leq -\frac{x^2}{2}}$$

c)

D'après le b), pour $x \in [0,1[,\ \ln(1-x) \leq -x - \frac{x^2}{2}$. Par croissance de l'exponentielle, $0 < 1 - x \leq e^{-x}\exp(-\frac{x^2}{2}) \Longleftrightarrow 0 < (1-x)e^x \leq \exp(-\frac{x^2}{2})$.

Donc, pour $x \in [0,1],\ 0 \leq (1-x)e^x \leq \exp(-\frac{x^2}{2})$; par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $0 \leq \Big((1-x)e^x\Big)^n \leq \exp(-\frac{nx^2}{2}) \Longleftrightarrow 0 \leq (1-x)^n e^{nx} \leq \exp(-\frac{nx^2}{2})$.

Les bornes de I_n sont dans l'ordre croissant ; on intègre cet encadrement :

$0 \leq I_n \leq \int_0^1 \exp(-\frac{nx^2}{2})dx.$

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \exp(-\frac{nx^2}{2}) \geq 0$, donc $\int_0^1 \exp(-\frac{nx^2}{2})dx \leq \int_0^{+\infty} \exp(-\frac{nx^2}{2})dx.$

Par suite : $0 \leq I_n \leq \int_0^{+\infty} \exp(-\frac{nx^2}{2})dx.$ **(1.c)**

Posons $t = x\sqrt{n}$; le changement est C^1, strictement croissant, donc licite. $dx = \frac{1}{\sqrt{n}}dt$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \exp(-\frac{nx^2}{2})dx &= \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}\exp(-\frac{t^2}{2})dt\\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{t^2}{2})dt\\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{t^2}{2})dt \quad \text{car } t\mapsto \exp(-\frac{t^2}{2}) \text{ est paire}\\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}
\end{aligned}$$

L'encadrement (1.c) donne

$$\boxed{\forall n\geq 1,\ 0\leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

2–a)

$x\in]0,1[\Longrightarrow h_n^*(x) = \Big((1-x)e^x\Big)^n > 0$. Donc

$H(x) = -2\dfrac{\ln h_n^*(x)}{nx^2} = -\dfrac{2n}{nx^2}\Big(\ln(1-x)+x\Big)$.

On effectue un développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.

$\ln(1-x)+x = -x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)+x = -\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$.

$H(x) = -\dfrac{2}{x^2}\Big(-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\Big) = 1+0(1)$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} H(x) = 1 \text{ ; on posera, par la suite, } H(0)=1}$$

b)

La fonction g est C^∞ sur $]0,1[$;

$g'(x) = -\ln(1-x)-x \geq \dfrac{x^2}{2} > 0$ d'après 1–b). La fonction g est strictement croissante sur $]0,1[$, $g(0)=0$, donc $\forall x\in]0,1[$, $g(x)>0$.

$g''(x) = \dfrac{x}{1-x} > 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est convexe et strictement positive sur }]0,1[}$$

c)

$$\begin{aligned}
H(x) &= -2\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}\\
H'(x) &= -2\frac{x^2(\frac{-1}{1-x}+1)-2x(\ln(1-x)+x)}{x^4}\\
&= -2\frac{1}{x^4}\Big(-\frac{x^3}{1-x}-2x\ln(1-x)-2x^2\Big)\\
&= 2\frac{1}{x^3}\Big(\frac{x^2}{1-x}+2\ln(1-x)+2x\Big)\\
&= 2\frac{1}{x^3(1-x)}\Big(-x^2+2(1-x)\ln(1-x)+2x\Big)\\
& 4\frac{1}{2x^3(1-x)}\Big((1-x)\ln(1-x)+x-\frac{x^2}{2}\Big)
\end{aligned}$$

$H'(x) = 4\dfrac{g(x)}{x^3(1-x)}$; H est croissante strictement sur $]0,1[$, donc sur $[0,1[$ par continuité en 0.

$H(0)=1$; $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln(1-x) = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}(-2\dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2}) = +\infty$.

$$\boxed{\text{La fonction } H \text{ réalise une bijection strictement croissante de } [0,1[\text{ sur son image } [1,+\infty[}$$

3–a)

La suite définie par $u_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$ convient.

b)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} H(u_n) = H(0) = 1$ par continuité de H au point 0.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 1}$$

c)

$h_n(x) \geq 0$; $u_n < 1$, donc $\displaystyle\int_0^1 h_n(x) \geq \int_0^{u_n} h_n(x)dx$; donc $I_n \geq \displaystyle\int_0^{u_n} \exp(-n\frac{x^2}{2}H(x))dx$.

$0 \leq x \leq u_n < 1 \iff H(x) \leq H(u_n)$ par stricte croissance de H sur $[0,1[$; par suite $-H(x) \geq -v_n$, donc $-n\frac{x^2}{2}H(x) \geq -n\frac{x^2}{2}v_n$, puis par croissance de l'exponentielle, $\exp(-n\frac{x^2}{2}H(x)) \geq \exp(-n\frac{x^2}{2}v_n)$. Les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant donc $\displaystyle\int_0^{u_n} \exp(-n\frac{x^2}{2}H(x))dx \geq \int_0^{u_n} \exp(-n\frac{x^2}{2}v_n)dx$ et par suite $I_n \geq \displaystyle\int_0^{u_n} \exp(-n\frac{x^2}{2}v_n)dx$

Posons $y = x\sqrt{nv_n}$; $dy = \sqrt{nv_n}dx$, donc $\displaystyle\int_0^{u_n} \exp(-n\frac{x^2}{2}v_n)dx = \frac{1}{\sqrt{nv_n}}\int_0^{u_n\sqrt{nv_n}} \exp(-\frac{y^2}{2})dy$

$$\boxed{I_n \geq \frac{1}{\sqrt{nv_n}}\int_0^{u_n\sqrt{nv_n}} \exp(-\frac{y^2}{2})dy}$$

d)

On a donc l'encadrement suivant : $\displaystyle\underbrace{\frac{1}{\sqrt{nv_n}}\int_0^{u_n\sqrt{nv_n}} \exp(-\frac{y^2}{2})dy}_{=J_n} \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ **(3.d)**

$J_n = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{nv_n}}\displaystyle\int_0^{u_n\sqrt{nv_n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{y^2}{2})dy$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1 \Longrightarrow \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{nv_n}} \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}$;

$u_n\sqrt{nv_n} \underset{(n\to+\infty)}{\sim} u_n\sqrt{n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\sqrt{nv_n} = +\infty$. Par conséquent,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{u_n\sqrt{nv_n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{y^2}{2})dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{y^2}{2})dy = \frac{1}{2}$ d'après la loi normale centrée réduite. Il en résulte que $J_n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

D'après l'encadrement (3.d),

$$\boxed{I_n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

4–a)

D'après le cours, par stabilité des lois gamma, la variable S_n suit la loi Gamma de paramètre $(1,n)$, dite loi de Erlang.

$$\text{Une densité de } S_n \text{ est } f_{S_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

On applique le théorème de la limite centrée : en effet, S_n est la somme de n variables indépendantes, de même loi, possédant une espérance et une variance > 0. D'après le cours, $E(S_n) = n$ et $V(S_n) = n$.

Alors la variable $S_n^* = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable qui suit la loi normale centrée, réduite.

$\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to+\infty} P(Sn^* \leq x) = \Phi(x)$. Pour $x = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n^* \leq 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$. Or $S_n^* \leq 0 \iff S_n \leq n$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leq n) = \frac{1}{2}}$$

b)

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0,\ P(|U_n| \geq \varepsilon) &= P\Big(\Big|\frac{T_{n+1}}{\sqrt{n}}\Big| \geq \varepsilon\Big)\\
&= P\Big(\frac{T_{n+1}}{\sqrt{n}} \geq \varepsilon\Big) \quad \text{car } T_{n+1} \geq 0\\
&= P(T_{n+1} \geq \varepsilon\sqrt{n}) \quad \text{car } \sqrt{n} > 0\\
&= \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-\varepsilon\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(\big|U_n\big| \geq \varepsilon) = 0. \text{ La suite } (U_n) \text{ converge en probabilité vers } 0}$$

c)

$\dfrac{S_{n+1} - n}{\sqrt{n}} = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}} + \dfrac{T_{n+1}}{\sqrt{n}} = S_n^* + \dfrac{T_{n+1}}{\sqrt{n}}$.

Appliquons le théorème de Slutsky : la suite (S_n^*) converge en probabilité vers une variable S qui suit la loi normale centré réduite ; la suite $(\frac{T_{n+1}}{\sqrt{n}})$ converge en probabilité vers 0, donc la suite $(S_n^* + \dfrac{T_{n+1}}{\sqrt{n}})$ converge en loi vers S.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(S_{n+1} \leq n) = \frac{1}{2}}$$

5)

$P(S_{n+1} \leq n) = \displaystyle\int_0^n \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx = \frac{n^{n+1}}{e^n} \frac{1}{n!} I_n$ d'après la question 1–a). Or $I_n \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ d'après la question 3–d), par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_{n+1} \leq n) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{n+1}}{e^n} \dfrac{1}{n!} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}} = \dfrac{1}{2}$.

Donc $\dfrac{n^{n+1}}{e^n n!} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}} \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{2} \iff n! \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \dfrac{n^{n+1}}{e^n} \sqrt{\dfrac{4\pi}{2n}}$.

$$\boxed{n! \underset{(n\to+\infty)}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}$$

Partie II : quelques propriétés de la loi de Cauchy.

6–a)

Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\begin{aligned}
y = \mathrm{Arctan}(x) &\iff x = \tan(y)\\
&\iff -x = \tan(-y) \quad \text{car la fonction tangente est impaire}\\
&\iff -y = \mathrm{Arctan}(-x)\\
&\iff -\mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}(-x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction Arctan est impaire}}$$

b)

La fonction Arctan est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ puisque sa dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On peut appliquer la formule de Taylor-Young qui résulte de la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral.

$\mathrm{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\mathrm{Arctan}''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\mathrm{Arctan}'''(x) = 2\dfrac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$.

$\mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}(0) + x\,\mathrm{Arctan}'(0) + \dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{Arctan}''(0) + \dfrac{x^3}{6}\,\mathrm{Arctan}'''(0) + o(x^3) = x - \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

Remarque : on peut aussi partir de $\dfrac{1}{1+t^2} = 1-t^2+o(t^2)$, donc $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ ce qui donne $\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(0) = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

c)

On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction Arctan entre 0 et x, pour $x \geq 0$.

Sur $[0,x]$, $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$ ce qui implique $0 \leq \mathrm{Arctan}'(t) \leq 1$. On obtient alors $0 \leq \mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(0) \leq x$

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ 0 \leq \mathrm{Arctan}(x) \leq x}$$

Remarque : $0 \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$, donc pour $x \geq 0$, $0 \leq \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \leq \int_0^x dt$, ce qui donne le résultat.

d)

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; la fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition $x \mapsto \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction f définie par $f(x) = \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+(\frac{1}{x^2})} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$. Donc f est constante.

$\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{Arctan}(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0+} \mathrm{Arctan}(\frac{1}{x}) = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\forall x > 0,\ \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(\tfrac{1}{x}) = \tfrac{\pi}{2}}$$

7–a)

Notons $h(x) = \dfrac{1}{\pi} \times \dfrac{1}{1+(x-\theta)^2}$;

La fonction h est positive, continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.

$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+(x-\theta)^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+t^2}dt$ en posant $t = x-\theta$, changement de variable C^1 strictement croissant.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+t^2}dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+t^2}dt$ car la fonction que l'on intègre est paire.

$$2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\pi}\times\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\Big(\text{Arctan}(x)-\text{Arctan}(0)\Big)=\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}=1.$$

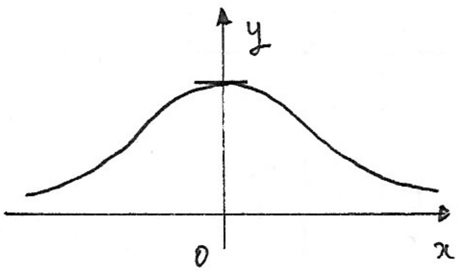
$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est une densité de probabilité}}$$

b)

$xh(x)\underset{(x\to+\infty)}{\sim}\frac{1}{\pi}\frac{1}{x}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ est divergente de manière évidente ; par équivalence des fonctions continues positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty}xh(x)dx$ diverge, donc $\int_{-\infty}^{+\infty}xh(x)dx$ diverge.

$$\boxed{\text{La variable } X \text{ n'admet pas d'espérance}}$$

c)



8–a)

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ F_X(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+(u-\theta)^2}du \quad \text{on pose } t=u-\theta\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x-\theta}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{\pi}\lim_{y\to-\infty}\int_y^{x-\theta}\frac{1}{1+t^2}dt\\&=\frac{1}{\pi}\lim_{y\to-\infty}\Big(\text{Arctan}(x-\theta)-\text{Arctan}(y)\Big)\\&=\frac{1}{\pi}\Big(\text{Arctan}(x-\theta)+\frac{\pi}{2}\Big)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ F_X(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\text{Arctan}(x-\theta)}$$

b)

$F_X(x)=\frac{1}{2}\iff \text{Arctan}(x-\theta)=0\iff x-\theta=0$ par bijectivité de la fonction Arctan

$$\boxed{\text{La variable } X \text{ admet une médiane théorique : } m=\theta}$$

Partie III : la loi de la moyenne empirique.

9–a)

$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{n,x}(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)(1+(x-nt)^2)}dt$. L'intégrale est impropre uniquement en $-\infty$ et $+\infty$ car la fonction $\varphi_{n,x}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\varphi_{n,x}(t)\underset{(t\to\pm\infty)}{\sim}\frac{1}{n^2t^4}$.

Les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2t^4}dt$ et $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^2t^4}dt$ convergent, donc par équivalence des fonctions continues positives, les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} \varphi_{n,x}(t)dt$ et $\int_{1}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t)dt$ convergent,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t)dt \text{ converge}}$$

b)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $I(a,b) = \int_a^b \Big(\frac{2t}{1+t^2} - \frac{2n(nt-x)}{1+(x-nt)^2}\Big)dt$. Par linéarité de l'intégration,

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \int_a^b \frac{2t}{1+t^2}dt - \int_a^b \frac{2n(nt-x)}{1+(x-nt)^2}dt \\ &= \ln(1+b^2) - \ln(1+a^2) - \Big(\ln(1+(x-nb)^2) - \ln(1+(x-na)^2)\Big) \\ &= \ln(\frac{1+b^2}{1+(x-nb)^2}) - \ln(\frac{1+a^2}{1+(x-na)^2}) \end{aligned}$$

$\lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1+b^2}{1+(x-nb)^2} = \frac{1}{n^2} \implies \lim\limits_{b\to+\infty} \ln(\frac{1+b^2}{1+(x-nb)^2}) = \ln(\frac{1}{n^2}) = -2\ln n$ par continuité de la fonction ln au point $\frac{1}{n^2}$.

$\lim\limits_{a\to-\infty} \frac{1+a^2}{1+(x-na)^2} = \frac{1}{n^2} \implies \lim\limits_{a\to-\infty} \ln(\frac{1+a^2}{1+(x-na)^2}) = -2\ln n$ par continuité de la fonction ln au point $\frac{1}{n^2}$.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{n,x}(t)dt \text{ converge et vaut } 0}$$

c)

$$\begin{aligned} \varphi_{n,x}(t) &= \frac{1}{\sigma_{n,x}}\Big(\frac{2nxt}{1+t^2} + \frac{1+x^2-n^2}{1+t^2} - \frac{2n^3xt}{1+(x-nt)^2} + \frac{n^2(3x^2+n^2-1)}{1+(x-nt)^2}\Big) \\ &= \frac{1}{\sigma_{n,x}}\Big(nx(\frac{2t}{1+t^2} - \frac{2n(nt-x)}{1+(x-nt)^2}) + \frac{1+x^2-n^2}{1+t^2} + \frac{n^2(x^2+n^2-1)}{1+(x-nt)^2}\Big) \end{aligned}$$

Par linéarité des intégrales convergentes,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t)dt &= \frac{1}{\sigma_{n,x}}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{n,x}(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2-n^2}{1+t^2}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^2(x^2+n^2-1)}{1+(x-nt)^2}dt\Big) \\ &= \frac{1}{\sigma_{n,x}}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2-n^2}{1+t^2}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^2(x^2+n^2-1)}{1+(x-nt)^2}dt\Big) \end{aligned}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2-n^2}{1+t^2}dt = (1+x^2-n^2)\pi$ d'après la question 7–a)

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(x-nt)^2}dt = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}du = \frac{\pi}{n}$. (on a posé $u = x - nt$)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2-n^2}{1+t^2}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^2(x^2+n^2-1)}{1+(x-nt)^2}dt &= (1+x^2-n^2)\pi + n(x^2+n^2-1)\pi \\ &= \pi\Big(x^2(n+1) + (1-n^2) + n(n^2-1)\Big) \\ &= \pi(n+1)(x^2+1-n+n(n-1)) \\ &= \pi(n+1)(x^2+(n-1)^2) \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t)dt = \frac{1}{(x^2+(n+1)^2)(x^2+(n-1)^2)}\pi(n+1)(x^2+(n-1)^2) = \frac{(n+1)\pi}{x^2+(n+1)^2}}$$

10–a)

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = P(X - \theta \le x) = P(X \le x + \theta) = F_X(x+\theta)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\text{Arctan}(x) : Y \text{ suit la loi de Cauchy } \mathcal{C}_0}$$

b)

Déterminons une densité de $S_2 = Y_1 + Y_2$ On peut appliquer le produit de convolution car l'une au moins des densités de Y_1 et Y_2 est bornée.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ f_{S_2}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1}(t) f_{Y_2}(x-t)dt \\
&= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\frac{1}{1+(x-t)^2}dt \\
&= \frac{1}{\pi^2}\varphi_{1,x} = \frac{1}{\pi^2}\frac{2\pi}{x^2+4} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{x^2+4} \qquad \text{d'après le résultat précédent}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ F_{S_2}(x) &= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t^2+4}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{(\frac{t}{2})^2+1}dt \qquad \text{on pose } u = \frac{t}{2} \text{ ; changement licite} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\frac{x}{2}} \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{\pi}(\text{Arctan}(\frac{x}{2}) + \frac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{\overline{Y}_2}(x) = P(\frac{S_2}{2} \leq x) = P(S_2 \leq 2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\text{Arctan}(x).$$

$$\boxed{\text{La variable } \overline{Y}_2 \text{ suit la loi de Cauchy } \mathcal{C}_0}$$

c)

Procédons par récurrence : soit $H(n)$ la propriété : la fonction de répartition de S_n est $x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\text{Arctan}(\frac{x}{n})$;

La propriété $H(n)$ est satisfaite pour $n = 1$ et $n = 2$.

Supposons $H(n)$ satisfaite pour un entier naturel non nul donné :

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{S_n}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\text{Arctan}(\frac{x}{n})$; donc $f_{S_n}(x) = \frac{1}{n\pi}\frac{1}{1+\frac{x^2}{n^2}}$.

Déterminons une densité de S_{n+1} par le produit de convolution.

$$\begin{aligned}
f_{S_{n+1}}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_n}(x-t) f_{Y_1}(t)dt \\
&= \frac{1}{n\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+(\frac{x-t}{n})^2)}dt \qquad \text{on pose } u = \frac{x-t}{n} \\
&\quad t = x - nu,\ dt = -ndu \\
&= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+(x-nu)^2)(1+u^2)}du \\
&= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t)dt = \frac{1}{\pi}\frac{n+1}{x^2+(n+1)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{S_{n+1}}(x) &= P(\frac{S_{n+1}}{n+1} \leq x) = P(S_{n+1} \leq (n+1)x) \\
&= \frac{n+1}{\pi}\int_{-\infty}^{(n+1)x} \frac{1}{t^2+(n+1)^2}dt \qquad \text{on pose } u = \frac{t}{n+1} \\
&= \frac{n+1}{\pi}\frac{1}{(n+1)^2}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{u^2+1}(n+1)du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+u^2}du \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\text{Arctan}(x)
\end{aligned}$$

$\overline{Y}_{n+1}$ suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}_0$.

La propriété $H(n)$ est héréditaire et par principe du raisonnement par récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{Y}_n \text{ suit la loi de Cauchy } \mathcal{C}_0}$$

d)
La loi faible des grands nombres ne s'applique pas car $\overline{Y}_n$ n'admet pas d'espérance d'après 7–a).

11–a)

```
N=12000 ; n=200
A=cauchy(N,n)
Moyemp=sum(A)/(N*n)
x=(-8:0.5:8)
histplot(x,Moyemp)
histplot(a,A(:,1)
```

b)
Ces deux histogrammes tendent à prouver que $\overline{Y}_n$ suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}_0$.

12–a)

$A \cap [Z = 1]$ est l'évènement : " il n'y a qu'un seul indice i tel que $x < X_i < x + h$, c'est-à-dire que $\hat{X}_{n+1}$ appartient à $]x, x+h[$ et c'est la seule variable.

Il y a donc n variables X_j parmi les $2n+1$ pour lesquelles $(X_j \leq x)$; parmi les $n+1$ autres, chacune peut jouer le rôle de $\hat{X}_{n+1}$ et les n autres vérifient $X_j \geq x + h$.

B peut s'écrire : (il existe n variables X_i / $X_i \leq x$) et (il existe une variable X_j parmi les $n+1$ restantes telle que $X_k \in]x, x+h[$) et les n variables restantes appartiennent à $[x+h, +\infty[$. Par indépendance des variables,

$$\boxed{P(B) = (n+1)\binom{2n+1}{n}(F_X(x))^n(F_X(x+h) - F_X(x))(1 - F_X(x+h))^n}$$

b)
Comme $[Z \geq 1]$ est réalisé dans A, $A = (A \cap [Z = 1]) \cup (A \cap [Z \geq 2])$. Donc, par incompatibilité des deux évènements,

$P(A) = P(B) + P(A \cap [Z \geq 2])$

$$P(A) - P(B) = P(A \cap [Z \geq 2])$$

Notons C_k l'évènement : " il y a exactement k variables X_i dans l'intervalle $[x, x+h]$ " et A_k l 'évènement " les autre variables se répartissent de manière que $\hat{X}_{n+1}$ appartienne à $[x, x+h]$.

$A \cap [Z \geq 2] = \bigcup\limits_{k=2}^{2n+1} A_k \cap C_k$. Les évènements de l'union sont incompatibles deux à deux, donc

$$P\left(\bigcup_{k=2}^{2n+1} C_k \cap A_k\right) = \sum_{k=2}^{2n+1} P(C_k \cap A_k)$$

or, par indépendance des variables

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{2n+1} P(C_k \cap A_k) &= \sum_{k=2}^{2n+1} P(C_k)P(A_k) = \sum_{k=2}^{2n+1} (F_X(x+h) - F_X(x))^k P(A_k)\\ &= (F_X(x+h) - F_X(x))^2 \sum_{k=2}^{2n+1} (F_X(x+h) - F_X(x))^{k-2} P(A_k)\end{aligned}$$

Or $(F_X(x+h) - F_X(x)) \in [0, 1]$, donc $0 \leq (F_X(x+h) - F_X(x))^{k-2} \leq 1$.

D'autre part, A_k est l'union d'évènements de la forme : si l'on note r le rang de $\hat{X}_{n+1}$ parmi les k variables qui sont dans $[x, x+h]$, alors il y a dans cet intervalle, $r-1$ variables inférieures ou égales à $\hat{X}_{n+1}$, donc $i=n-r+1$ variables appartenant à $]-\infty,+x]$ (cela donne n variables inférieures ou égales à $\hat{X}_{n+1}$) ; les autres variables étant dans $[x+h,+\infty[$. Notons s le nombre de ces variables, on a $2n+1=n-r+1+k+s \Longleftrightarrow s=n+r-k$.

$$P(A_k)=\sum_{r=1}^{k-1}(F_X(x))^{n-r+1}(1-F_X(x+h))^{n+r-k} \leq \sum_{r=1}^{k-1}(F_X(x))^{n-r+1}.$$

Notons $P_k=\sum_{r=1}^{k-1}(F_X(x))^{n-r+1}$, on obtient donc

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{k=2}^{2n+1} C_k\cap A_k) &\leq (F_X(x+h)-F_X(x))^2\sum_{k=2}^{2n+1}(F_X(x+h)-F_X(x))^{k-2}P(A_k)\\ &\leq (F_X(x+h)-F_X(x))^2\sum_{k=2}^{2n+1}P(A_k)\\ &\leq (F_X(x+h)-F_X(x))^2\sum_{k=2}^{2n+1}P_k \end{aligned}$$

Remarquons que P_k ne dépend pas de h; par suite, en posant $K=\sum_{k=2}^{2n+1}P_k$,

$$\boxed{\text{Il existe un réel } K \text{ indépendant de } h \text{ tel que } P(A)-P(B)\leq (F_X(x+h)-F_X(x))^2K}$$

c)

$\hat{X}_{n+1}=g_{n+1}(X_1,\dots,X_{2n+1})$, donc d'après l'hypothèse, $\hat{X}_{n+1}$ est une variable à densité.

$P(B)=P(x\leq \hat{X}_{n+1}\leq x+h)=F_{\hat{X}_{n+1}}(x+h)-F_{\hat{X}_{n+1}}(x)$.

D'après la question a),

$$F_{\hat{X}_{n+1}}(x+h)-F_{\hat{X}_{n+1}}(x)=(n+1)\binom{2n+1}{n}(F_X(x))^n(F_X(x+h)-F_X(x))(1-F_X(x+h))^n$$

$f_{\hat{X}_{n+1}}(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{P(B)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\binom{2n+1}{n}(F_X(x))^n(\dfrac{F_X(x+h)-F_X(x)}{h})(1-F_X(x+h))^n$; la fonction F_X est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\lim\limits_{h\to 0}(1-F_X(x+h))^n=(1-F_X(x))^n$. Par conséquent,

$$\boxed{f_{\hat{X}_{n+1}}(x)=(n+1)\binom{2n+1}{n}(F_X(x))^n(1-F_X(x))^nf_X(x)}$$

13–a)

D'après la question 8–a), $F_X(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(x-\theta)$. Pour $x>\theta$,

$F_X(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}(\dfrac{1}{x-\theta}))=1-\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(\dfrac{1}{x-\theta})$, d'après 6–d).

$\lim\limits_{x\to+\infty}F_X(x)=1\Longleftrightarrow F_X(x)\underset{(+\infty)}{\sim}1.$

$1-F_X(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(\dfrac{1}{x-\theta})\underset{(+\infty)}{\sim}\dfrac{1}{\pi x}.$

$f_X(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+(x-\theta)^2}\underset{(+\infty)}{\sim}\dfrac{1}{\pi x^2}.$ Par suite

$$xf_{\hat{X}_{n+1}}(x)\underset{(+\infty)}{\sim}(n+1)\binom{2n+1}{n}\left(\frac{1}{\pi x}\right)^n\frac{1}{\pi x^2}\times x=\underbrace{(n+1)\binom{2n+1}{n}\frac{1}{\pi^{n+1}}}_{B_n}\frac{1}{x^{n+1}}.$$

$$|xf_{\hat{X}_{n+1}}(x)|\underset{(+\infty)}{\sim}B_n\frac{1}{|x|^{n+1}}.$$

$n \geq 1 \Longrightarrow \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|x|^{n+1}} dx$ et $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{|x|^{n+1}} dx$ convergent d'après le critère de Riemann.

Par équivalence des fonctions continues positives, les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} |x f_{\hat{X}_{n+1}}(x)| dx$ et $\int_{1}^{+\infty} |x f_{\hat{X}_{n+1}}(x)| dx$.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\hat{X}_{n+1}}(x) dx \text{ est absolument convergente ; } \hat{X}_{n+1} \text{ admet une espérance}}$$

b)

$\hat{X}_{n+1}$ est une variable aléatoire dont la loi dépend du paramètre θ.

$\hat{X}_{n+1}$ est un estimateur de θ.

c)

Par le théorème du transfert qui s'applique puisque $|(x-\theta) f_{\hat{X}_{n+1}}(x)| \leq |x f_{\hat{X}_{n+1}}(x)| + |\theta f_{\hat{X}_{n+1}}(x)|$,

$$\begin{aligned} E(\hat{X}_{n+1} - \theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\theta) f_{\hat{X}_{n+1}}(x) dx \\ &= (n+1) \binom{2n+1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\theta)(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}(x-\theta))^n (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}(x-\theta))^n \\ &\qquad \times \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(x-\theta)^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi}(n+1) \binom{2n+1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-\theta}{1+(x-\theta)^2} \Big(\frac{1}{4} - (\frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}(x-\theta))^2\Big)^n dx \end{aligned}$$

Posons $u = x - \theta$; changement affine, donc licite

$$E(\hat{X}_{n+1} - \theta) = \frac{1}{\pi}(n+1) \binom{2n+1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{1+u^2} \Big(\frac{1}{4} - (\frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan} u)^2\Big)^n du.$$

L'intégrale converge, la fonction que l'on intègre est impaire, donc l'intégrale est nulle

$$\boxed{E(\hat{X}_{n+1} - \theta) = 0 \Longleftrightarrow E(\hat{X}_{n+1}) = \theta \text{ ; } \hat{X}_{n+1} \text{ est un estimateur sans biais de } \theta}$$

d)

$x^2 \hat{f}_{n+1}(x) \underset{(+\infty)}{\sim} B_n \frac{1}{|x|^n}$.

$\hat{X}_{n+1}$ admet une variance si et seulement si $n \geq 2$.

14–a)

Rappelons que $f_{\hat{X}_{n+1}}(x) = \frac{1}{\pi}(n+1) \binom{2n+1}{n} \frac{1}{1+(x-\theta)^2} \Big(\frac{1}{4} - (\frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}(x-\theta))^2\Big)^n$.

$$\begin{aligned} f_{\hat{X}_{n+1}}(2\theta - t) &= \frac{1}{\pi}(n+1) \binom{2n+1}{n} \frac{1}{1+(2\theta-t-\theta)^2} \Big(\frac{1}{4} - (\frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}(2\theta-t-\theta))^2\Big)^n \\ &= \frac{1}{\pi}(n+1) \binom{2n+1}{n} \frac{1}{1+(\theta-t)^2} \Big(\frac{1}{4} - (\frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}(\theta-t))^2\Big)^n \\ &= \frac{1}{\pi}(n+1) \binom{2n+1}{n} \frac{1}{1+(t-\theta)^2} \Big(\frac{1}{4} - (\frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}(t-\theta))^2\Big)^n \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \; f_{\hat{X}_{n+1}}(2\theta - t) = f_{\hat{X}_{n+1}}(t)}$$

$$\begin{aligned} P([|\hat{X}_{n+1} - \theta| \geq \varepsilon]) &= P([\hat{X}_{n+1} - \theta \geq \varepsilon]) + P([\hat{X}_{n+1} - \theta \leq -\varepsilon]) \\ &= 1 - F_{\hat{X}_{n+1}}(\theta + \varepsilon) + F_{\hat{X}_{n+1}}(\theta - \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 - F_{\hat{X}_{n+1}}(\theta+\varepsilon) &= \int_{\theta+\varepsilon}^{+\infty} f_{\hat{X}_{n+1}}(t)dt \\
&= \int_{\theta+\varepsilon}^{+\infty} f_{\hat{X}_{n+1}}(2\theta - t)dt \qquad \text{on pose } u = 2\theta - t \\
\int_{\theta+\varepsilon}^{+\infty} f_{\hat{X}_{n+1}}(2\theta - t)dt &= -\int_{\theta-\varepsilon}^{-\infty} f_{\hat{X}_{n+1}}(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{\theta-\varepsilon} f_{\hat{X}_{n+1}}(u)du \\
&= F_{\hat{X}_{n+1}}(\theta-\varepsilon) \qquad \text{donc}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ P([|\hat{X}_{n+1} - \theta| \geq \varepsilon]) = 2F_{\hat{X}_{n+1}}(\theta-\varepsilon)}$$

b)

$F_{\hat{X}_{n+1}}(\theta-\varepsilon) = (n+1)\binom{2n+1}{n}\int_{-\infty}^{\theta-\varepsilon}(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\operatorname{Arctan}^2(x-\theta))^n \frac{1}{1+(x-\theta)^2}dx.$

Posons $A(n) = (n+1)\binom{2n+1}{n}$

$$\begin{aligned}
A(n) &= (n+1)\binom{2n+1}{n} = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \\
&\quad \text{utilisons la formule de Stirling,} \\
A(n) &\underset{(+\infty)}{\sim} \frac{(2n+1)^{2n+1}e^{-(2n+1)}\sqrt{2\pi(2n+1)}}{n^{2n}e^{-2n}2\pi n} \\
&\underset{(+\infty)}{\sim} (\frac{2n+1}{n})^{2n}e^{-1}(2n+1)\frac{2\sqrt{\pi n}}{2\pi n} \\
&\underset{(+\infty)}{\sim} (\frac{2n+1}{n})^{2n}e^{-1}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

$(\frac{2n+1}{n})^{2n} = \left(2(1+\frac{1}{2n})\right)^{2n} = 4^n\exp(2n(\ln(1+\frac{1}{2n}))).$

$\lim_{n\to+\infty} 2n\ln(1+\frac{1}{2n}) = 2n\frac{1}{2n} = 1$. Par continuité de l'exponentielle au point 1, $\lim_{n\to+\infty}\exp(2n(\ln(1+\frac{1}{2n}))) = e$, donc $= 4^n\exp(2n(\ln(1+\frac{1}{2n}))) \underset{(+\infty)}{\sim} e4^n$.

$$A(n) \underset{(+\infty)}{\sim} e4^n e^{-1}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} = 4^n\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$$

Posons $I_n = \int_{-\infty}^{\theta-\varepsilon}(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\operatorname{Arctan}^2(x-\theta))^n\frac{1}{1+(x-\theta)^2}dx.$

L'idée est de majorer I_n par une expression qui contient $\frac{1}{4^n}\frac{1}{n}$ (ou $\frac{1}{n+1}$). On aura alors une majoration de A_nI_n par une expression qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Le terme $\frac{1}{n}$ ou $\frac{1}{n+1}$ provient vraisemblablement de l'intégration de la puissance n.

Dans l'intégrale $I_n = \int_{-\infty}^{\theta-\varepsilon}(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\operatorname{Arctan}^2(x-\theta))^n\frac{1}{1+(x-\theta)^2}dx$,

posons $u = x - \theta$; le changement est affine, donc licite.

$I_n = \int_{-\infty}^{-\varepsilon}(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\operatorname{Arctan}^2(u))^n\frac{1}{1+u^2}du = \int_{\varepsilon}^{\infty}(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\operatorname{Arctan}^2(u))^n\frac{1}{1+u^2}du$ car la fonction que l'on intègre est paire.

Posons alors $v = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\arctan^2(u)$. Le changement est C^1, bijectif sur $\mathbb{R}_+^*$, donc licite.

$dv = -\frac{2}{\pi^2}\frac{\arctan(u)}{1+u^2}du \Longleftrightarrow \frac{du}{1+u^2} = -\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{\arctan(u)}dv$. Or $\arctan(u) = \pi\sqrt{\frac{1}{4} - v}$, donc

$\dfrac{du}{1+u^2} = -\dfrac{\pi^2}{2}\dfrac{1}{\pi\sqrt{\frac{1}{4}-v}}dv = -\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-v}}dv$

$u \in [\varepsilon,+\infty[\implies \arctan(u) \in [\arctan(\varepsilon), \frac{\pi}{2}[$ par stricte croissance de arctan. Donc $\frac{1}{\pi^2}\arctan^2(u) \in [\frac{1}{\pi^2}\arctan^2(\varepsilon), \frac{1}{4}[$, par suite $v \in]0, \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\arctan^2(\varepsilon)]$.

Posons $a = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\arctan^2(\varepsilon)$.

$I_n = -\displaystyle\int_a^0 \frac{\pi}{2}\frac{v^n}{\sqrt{\frac{1}{4}-v}}dv = \frac{\pi}{2}\int_0^a \frac{v^n}{\sqrt{\frac{1}{4}-v}}dv.$

$0 < v \leq a \iff 0 < \frac{1}{4} - a \leq \frac{1}{4} - v < \frac{1}{4}$; donc $\sqrt{\frac{1}{4}-v} \geq \sqrt{\frac{1}{4}-a} > 0$ par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+^*$ puis

$\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-v}} < \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-a}}$ par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a alors $\dfrac{v^n}{\pi\sqrt{\frac{1}{4}-v}} \leq \dfrac{v^n}{\pi\sqrt{\frac{1}{4}-a}}$ sans problème puisque $v^n \geq 0$; les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant, donc $\displaystyle\frac{\pi}{2}\int_0^a \frac{v^n}{\sqrt{\frac{1}{4}-v}}dv \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-a}}\int_0^a v^n dv.$ **(14.b)**

$\displaystyle\int_0^a v^n dv = \frac{1}{n+1}a^{n+1} = \frac{1}{n+1}(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\arctan^2(\varepsilon))^{n+1} \leq \frac{1}{4^{n+1}}\frac{1}{n+1}.$

L'égalité (14.b) donne : $0 \leq I_n \leq B\dfrac{1}{4^{n+1}}\dfrac{1}{n+1}$, en posant $B = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-a}}$.

Or $F_{\hat{X}_{n+1}}(\theta-\varepsilon) = A(n)I_n$ ce qui donne l'encadrement :

$$0 \leq F_{\hat{X}_{n+1}}(\theta-\varepsilon) \leq BA(n)\frac{1}{(n+1)4^{n+1}}. \qquad \textbf{(14.b.1)}$$

$A(n) \underset{(+\infty)}{\sim} 4^n\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$, donc $A(n)\dfrac{1}{(n+1)4^{n+1}} \underset{(+\infty)}{\sim} 4^n\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}\dfrac{1}{4^{n+1}}\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} A(n)\frac{1}{(n+1)4^{n+1}} = 0$

L'encadrement (14.b.1) donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_{\hat{X}_{n+1}}(\theta-\varepsilon) = 0.$

Or $P([|\hat{X}_{n+1}-\theta| \geq \varepsilon]) = 2F_{\hat{X}_{n+1}}(\theta-\varepsilon)$, donc

$\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P([|\hat{X}_{n+1}-\theta| \geq \varepsilon]) = 0. \text{ La suite } (\hat{X}_{n+1}) \text{ converge en probabilité vers } \theta}$

c)

La convergence en probabilité implique la convergence en loi, donc

$\boxed{\text{la suite } (\hat{X}_{n+1}) \text{ converge en loi vers la variable certaine égale à } \theta}$

15–a)

$F_{W_{n+1}}(x) = P(\dfrac{2\sqrt{2n+1}}{\pi}(\hat{X}_{n+1}-\theta) \leq x) = P(\hat{X}_{n+1} \leq \dfrac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}} + \theta) = F_{\hat{X}_{n+1}}(\dfrac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}} + \theta).$

Il n'y a aucun problème de dérivation, donc

$$f_{W_{n+1}}(x)=\frac{\pi}{2\sqrt{2n+1}}f_{\hat{X}_{n+1}}(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}}+\theta)$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f_{W_{n+1}}(x)=\frac{n+1}{2\sqrt{2n+1}}\binom{2n+1}{n}\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}\operatorname{Arctan}^2(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}})\Big)^n\Big(\frac{1}{1+\frac{\pi^2x^2}{4(2n+1)}}\Big)}$$

b)

On vient de voir que $(n+1)\dbinom{2n+1}{n}\underset{(+\infty)}{\sim}4^n\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$,

$$\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}\operatorname{Arctan}^2(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}})\Big)^n=\frac{1}{4^n}\Big(1-\frac{4}{\pi^2}\operatorname{Arctan}^2(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}})\Big)^n.$$

$$\Big(1-\frac{4}{\pi^2}\operatorname{Arctan}^2(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}})\Big)^n=\exp(n\ln(1-\frac{4}{\pi^2}\operatorname{Arctan}^2(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}})))$$

$$\begin{aligned}n\ln(1-\frac{4}{\pi^2}\operatorname{Arctan}^2(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}}))&\underset{(+\infty)}{\sim}-n\frac{4}{\pi^2}\operatorname{Arctan}^2(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}})\\&\underset{(+\infty)}{\sim}-\frac{4n}{\pi^2}\frac{\pi^2x^2}{4(2n+1)}\\&\underset{(+\infty)}{\sim}-\frac{nx^2}{2n+1}\underset{(+\infty)}{\sim}-\frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n\ln(1-\frac{4}{\pi^2}\operatorname{Arctan}^2(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}}))=-\frac{x^2}{2}$; par continuité de l'exponentielle au point $-\frac{x^2}{2}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\exp(n\ln(1-\frac{4}{\pi^2}\operatorname{Arctan}^2(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}})))=\exp(-\frac{x^2}{2})$. Ce qui peut s'exprimer aussi $\exp(n\ln(1-\frac{4}{\pi^2}\operatorname{Arctan}^2(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}}))\underset{(+\infty)}{\sim}\exp(-\frac{x^2}{2})$.

$$\Big(1-\frac{4}{\pi^2}\operatorname{Arctan}^2(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}})\Big)^n\underset{(+\infty)}{\sim}\exp(-\frac{x^2}{2}).$$

On vient de voir que $(n+1)\dbinom{2n+1}{n}\underset{(+\infty)}{\sim}4^n\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$, donc

$$\frac{n+1}{2\sqrt{2n+1}}\binom{2n+1}{n}\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}\operatorname{Arctan}^2(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}})\Big)^n\Big(\frac{1}{1+\frac{\pi^2x^2}{4(2n+1)}}\Big)\underset{(+\infty)}{\sim}$$
$$4^n\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2\sqrt{2n}}\frac{1}{4^n}\exp(-\frac{x^2}{2}).$$

$$\frac{n+1}{2\sqrt{2n+1}}\binom{2n+1}{n}\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}\operatorname{Arctan}^2(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}})\Big)^n\Big(\frac{1}{1+\frac{\pi^2x^2}{4(2n+1)}}\Big)\underset{(+\infty)}{\sim}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2}).$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}f_{W_{n+1}}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})}$$

c)

On cherche $a>0\ /\ P(\hat{X}_{n+1}-a\le\theta\le\hat{X}_{n+1}a)=1-\alpha$

$$\begin{aligned}\hat{X}_{n+1}-a\le\theta\le\hat{X}_{n+1}a&\iff-a\le\hat{X}_{n+1}-\theta\le a\\&\iff-a\le\frac{\pi W_{n+1}}{2\sqrt{2n+1}}\le a\\&\iff-\frac{2a\sqrt{2n+1}}{\pi}\le W_{n+1}\le\frac{2a\sqrt{2n+1}}{\pi}\end{aligned}$$

$$P(\hat{X}_{n+1}-a\le\theta\le\hat{X}_{n+1}a)=\Phi(\frac{2a\sqrt{2n+1}}{\pi})-\Phi(-\frac{2a\sqrt{2n+1}}{\pi})=2\Phi(\frac{2a\sqrt{2n+1}}{\pi})-1.$$

On veut donc avoir

$$2\Phi(\frac{2a\sqrt{2n+1}}{\pi})-1=1-\alpha\iff\Phi(\frac{2a\sqrt{2n+1}}{\pi})=1-\frac{\alpha}{2}\iff\frac{2a\sqrt{2n+1}}{\pi}=t_\alpha.$$

Donc $a = \dfrac{t_\alpha \pi}{2\sqrt{2n+1}}$.

$$\boxed{\text{L'intervalle } [\hat{X}_{n+1} - \frac{t_\alpha \pi}{2\sqrt{2n+1}}, \hat{X}_{n+1} + \frac{t_\alpha \pi}{2\sqrt{2n+1}}] \text{ est un intervalle de confiance de } \theta \text{ au seuil } 1-\alpha}$$