CONCOURS EDHEC - ADMISSION SUR TITRES

EN PREMIERE ANNEE

13 JUILLET 2020

EPREUVE D'ECONOMIE

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 4

Aucun document ou matériel électronique n'est autorisé.

Le sujet comporte : 4 parties

Consignes

Essayez de répondre de manière aussi précise et concise que possible aux questions. Evitez les longues digressions. Chaque résultat doit être accompagné d'une phrase d'explication.

A l'issue de chaque composition écrite, tout candidat est tenu sous peine d'élimination, de remettre au surveillant une copie (même blanche, qui sera alors signée). La seule responsabilité du candidat est engagée dans le cas contraire. Tout candidat sortant avant la fin des épreuves doit obligatoirement remettre le sujet en même temps que sa copie.

Partie 1 :

1. Supposons que la fonction de production d'une entreprise produisant un bien homogène soit donnée par :

$$Q(K,L) = K^{0,2}L^{0,7}$$

Le prix d'une unité de travail est noté *w*, le prix d'une unité de capital est noté *i* et le prix d'une unité d'output est *p*=100.

1.1 Quelle est la nature des rendements d'échelle relatifs à cette technologie ? Expliquez votre réponse en la développant formellement.
1.2 Posez les conditions de maximisation du profit de l'entreprise.
1.3 Déterminez l'expression générale de la fonction de demande de travail si *K*=10.
1.4 A quoi est égale la quantité de travail si le prix du travail est fixé à *w*=10 ? Illustrez graphiquement.
1.5 Reprenez la question précédente si *K*=20.

Partie 2 :

2. Supposons désormais la fonction de production suivante :

$$Q(K,L) = K^{0,5}L^{0,5}$$

Le prix d'une unité de travail est noté *w*, le prix d'une unité de capital est noté *i* et le prix d'une unité d'output est *p*=1.

2.1 En admettant que *w*=4 et *i*=1, donnez l'expression générale du coût total.
2.2 L'entreprise souhaite produire *Q*=10. Etant donné que *w*=4 et *i*=1, déterminez la combinaison optimale (*K**, *L**) qui minimise le coût total, puis calculez ce coût total.
2.3 Illustrez graphiquement le résultat précédent.
2.4 Si le prix du travail passe de *w*=4 à *w*=9, comment évoluera la quantité de travail utilisée ? Vérifiez votre réponse en calculant la nouvelle quantité de travail utilisée qui minimise le coût total, puis calculez ce nouveau coût total.
2.5 Avec les hypothèses de la question précédente, calculez le profit réalisé par la firme. Commentez le résultat obtenu.
2.6 Nous revenons au cadre de la question 2.2 (*w*=4, *i*=1), mais relâchons l'hypothèse que l'entreprise souhaite produire *Q*=10. Déterminez la combinaison optimale de capital et de travail qui minimise le coût total en fonction de *Q*, *K**(*Q*) et *L**(*Q*)
2.7 Déterminez l'expression du coût total en fonction de Q, C (*Q*). Calculez le coût marginal. Interprétez ce résultat.

Partie 3 :

3. Nous considérons la branche des salons de coiffure. Supposez que chaque salon de coiffure dans la branche ait pour fonction de coût en euros : $C(Q) = 162 + 0{,}05Q + 0{,}5Q^2$ où Q est l'output.

3.1 Déterminez l'expression du coût moyen et du coût marginal.

3.2 Si le prix actuel d'une coupe de cheveux est égal à 22 euros, peut-on dire que la branche est à l'équilibre concurrentiel de long terme ? Sinon, déterminez le prix associé à l'équilibre de long terme.

3.3 Une nouvelle taxe d'un euro par coupe de cheveux est imposée à l'ensemble des entreprises de la branche. Déterminez le nouveau prix associé à l'équilibre de long terme.

3.4 Supposez maintenant qu'une innovation technologique permette de réduire les coûts de 20% (quel que soit l'output Q) pour les entreprises de cette branche. En supposant que l'on soit à l'équilibre de long terme déterminé à la question précédente, combien chaque salon de coiffure pris individuellement serait prêt à investir pour acquérir cette nouvelle technologie ?

3.5 Si toutes les entreprises finissent par adopter cette nouvelle technologie, décrivez le nouvel équilibre de long terme.

Partie 4 :

4. Supposez maintenant que le processus de production soit caractérisé par la fonction de coût total suivante : $C(Q) = F + cQ$ où F représente les coûts fixes, Q l'output, et c un paramètre positif.

4.1 Montrez que l'on est dans une situation de monopole naturel. Expliquez votre réponse.

4.2 Supposez que l'Etat impose à la seule entreprise présente sur le marché une tarification au coût marginal qui permet d'obtenir le niveau d'output socialement optimal. Quel serait le montant des pertes pour l'entreprise ?

Sujet EDHEC 2020 – Analyse économique
Eléments de Correction

1. Supposons que la fonction de production d'une entreprise produisant un bien homogène soit donnée par :

$$Q(K,L) = K^{0,2}L^{0,7}$$

Le prix d'une unité de travail est noté *w*, le prix d'une unité de capital est noté *i* et le prix d'une unité d'output est *p*=100.

1.1 Quelle est la nature des rendements d'échelle relatifs à cette technologie. Expliquez votre réponse **en la développant formellement**.

$$Q(\lambda K,\lambda L) = (\lambda K)^{0,2}(\lambda L)^{0,7}$$

$\Leftrightarrow$

$$Q(\lambda K,\lambda L) = \lambda^{0,9}K^{0,2}L^{0,7}$$

$\Leftrightarrow$

$$Q(\lambda K,\lambda L) = \lambda^{0,9}Q(K,L)$$

d'où

$$Q(\lambda K,\lambda L) < \lambda Q(K,L)$$

donc les rendements d'échelle relatifs à cette technologie sont décroissants.

1.2 Posez les conditions de maximisation du profit de l'entreprise.

Par définition, le profit est donné par :

$$\pi(K,L) = PQ(K,L) - CT(K,L)$$

$\Leftrightarrow$

$$\pi(K,L) = PQ(K,L) - (iK + wL)$$

Le programme de maximisation du profit de l'entreprise s'écrit :

$$\underset{K,L}{Max} \qquad \pi(K,L) = PQ(K,L) - (iK + wL)$$

Et ses conditions de premier ordre sont données par :

$$\frac{\partial\pi(K^*,L^*)}{\partial L} = PQ'_L(K^*,L^*) - w = 0 \quad \text{soit} \quad PQ'_L(K^*,L^*) = w$$

et

$$\frac{\partial\pi(K^*,L^*)}{\partial K} = PQ'_K(K^*,L^*) - i = 0 \quad \text{soit} \quad PQ'_K(K^*,L^*) = i$$

1.3 Déterminez l'expression générale de la fonction de demande de travail si *K*=10.

Si l'entreprise maximise son profit, alors on sait qu'elle utilise une quantité de travail L telle que :

$$PQ'_L(K^*, L^*) = w$$

⇔

$$100 \times 0{,}7 \times 10^{0,2} L^{-0,3} = w$$

⇔

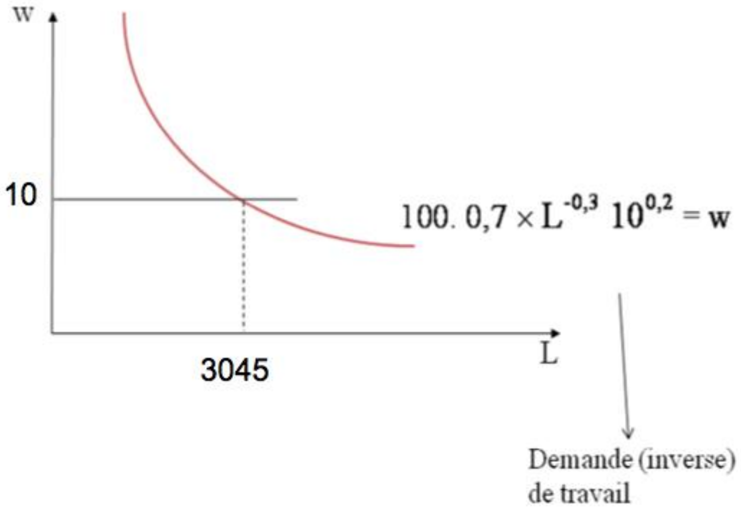
$$L^{-0,3} = \frac{w}{110{,}94}$$

⇔

$$L = \left(\frac{110{,}94}{w}\right)^{10/3}$$

1.4 A quoi est égale la quantité de travail si le prix du travail est fixé à *w*=10. Illustrez graphiquement.

$$L(w = 10) = \left(\frac{110{,}94}{10}\right)^{10/3} \approx 3045$$



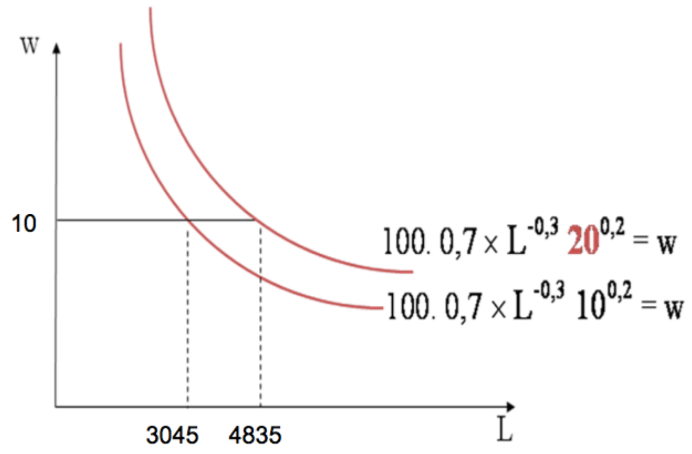
1.5 Reprenez la question précédente si *K*=20.

L et w vérifient maintenant :

$$100 \times 0{,}7 \times 20^{0,2} L^{-0,3} = w$$

⇔

$$L(w = 10; K = 20) = \left(\frac{127{,}44}{10}\right)^{10/3} \approx 4835$$



2. Supposons désormais la fonction de production suivante :

$$Q(K,L) = K^{0,5}L^{0,5}$$

Le prix d'une unité de travail est noté *w*, le prix d'une unité de capital est noté *i* et le prix d'une unité d'output est *p*=1.

2.1 En admettant que *w*=4 et *i*=1, donnez l'expression générale du coût total.

$$CT = 4L + K$$

2.2 L'entreprise souhaite produire *Q*=10. Etant donné que *w*=4 et *i*=1, déterminez la combinaison optimale (*K**, *L**) qui minimise le coût total.

$$\underset{K,L}{Min} \qquad 4L + K$$

$$s.c. \qquad K^{0,5}L^{0,5} = 10$$

⇔

$$K^{0,5}L^{0,5} = 10 \Leftrightarrow K = \frac{10^2}{L}$$

Le programme à résoudre devient :

$$\underset{L}{Min} \qquad 4L + \frac{100}{L}$$

La condition de premier ordre implique de déterminer L qui vérifie CT'(L*)=0, soit :*

$$4 - \frac{100}{L^{*2}} = 0 \Leftrightarrow L^* = 5$$

soit

$$K^* = \frac{10^2}{L^*} = 20$$

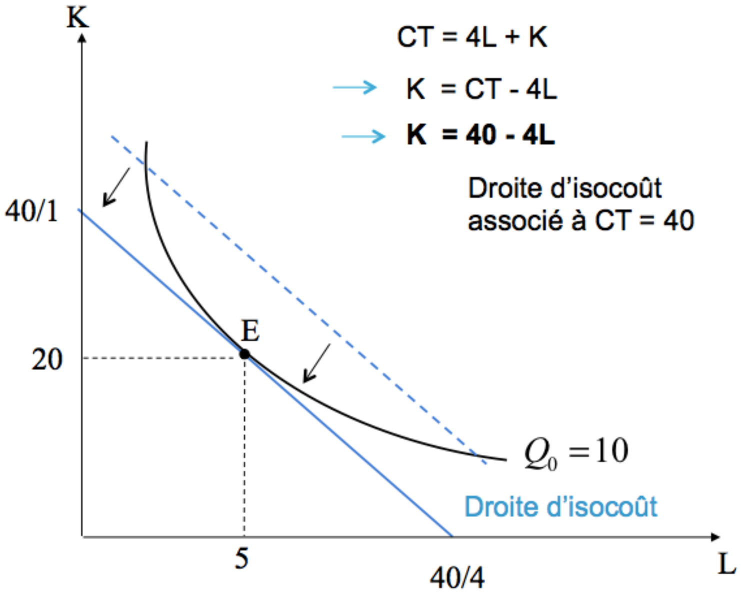
2.3 A combien s'élève le coût total ?

$$CT = 4L^* + K^*$$

soit

$$CT = 4 \times 5 + 20 = 40$$

2.4 Illustrez graphiquement le résultat précédent.



2.5 Si le prix du travail passe de *w*=4 à *w*=9, comment évoluera la quantité de travail utilisée ? Vérifiez votre réponse en calculant la nouvelle quantité de travail utilisée qui minimise le coût total, **puis calculez ce nouveau coût total.**

La quantité de travail utilisée devrait diminuer.

$$\underset{L}{Min} \quad 9L + \frac{100}{L}$$

La condition de premier ordre implique de déterminer L qui vérifie CT'(L*)=0, soit :*

$$9 - \frac{100}{L^{*2}} = 0 \Leftrightarrow L^* = \frac{10}{3}$$

soit

$$K^* = \frac{10^2}{L^*} = 30$$

et

$$CT = 9L^* + K^*$$

soit

$$CT = 9 \times \frac{10}{3} + 30 = 60$$

2.6 Avec les hypothèses de la question précédente, calculez le profit réalisé par la firme. Commentez le résultat obtenu.

Profit = 10 – 9L – K = 10 – 30 – 30 = - 50. Profit négatif.

2.7 Nous revenons au cadre de la question 2.2 (w=4, i=1), mais relâchons l'hypothèse que l'entreprise souhaite produire Q=10. Déterminez la combinaison optimale de capita et de travail qui minimise le coût total en fonction de Q, $K^*(Q)$ et $L^*(Q)$

L'objectif est min 4L + K s.c. $K^{0,5}L^{0,5} = Q$

K = $\frac{Q^2}{L}$

L'objectif devient Min 4L + $\frac{Q^2}{L}$

Donc la condition du premier ordre donne

4 - $\frac{Q^2}{L^2}$ = 0

L*(Q) = $\sqrt{\frac{Q^2}{4}}$ =0,5Q

K*(Q) = 2Q

2.8 Déterminez l'expression du coût total en fonction de Q, CT(Q). Calculez le coût marginal. Interprétez ce résultat.

CT(Q) = 4L* + K* = 4Q

Cm(Q) = 4. Une unit d'output supplémentaire augmente le coût total de 4 unités.

3. Nous considérons la branche des salons de coiffure. Supposez que chaque salon de coiffure dans la branche ait pour fonction de coût en euros : C(Q) = 162 + 0,05Q + 0,5Q^2 où Q est l'output.

3.1 Déterminez l'expression du coût moyen et du coût marginal.

CM(Q) = (162 + 0,05Q + 0,5Q^2)/Q

Cm(Q) = 0,05 + Q

3.2 Si le prix actuel d'une coupe de cheveux est égal à 22 euros, peut-on dire que la branche est à l'équilibre concurrentiel de long terme ? Sinon, déterminez le prix associé à l'équilibre de long terme.

Le seuil de rentabilité est CM(Q) = Cm(Q), soit 162/Q +0,05 + 0,5Q = 0,05 + Q.

Après calcul, cela aboutit à Q = 324 à l'équilibre concurrentiel de LT.

Sachant P = Cm(Q), on obtient P = 18,05€ et non 22€.

3.3 Une nouvelle taxe d'un euro par coupe de cheveux est imposée à l'ensemble des entreprises de la branche. Déterminez le nouveau prix associé à l'équilibre de long terme.

Le Coût devient $C(Q) = 162 + 1{,}05Q + 0{,}5Q^2$.

Donc $CM(Q) = 162/Q + 1{,}05 + 0{,}5Q$

$Cm(Q) = 1{,}05 + Q$

A l'équilibre, Q est toujours égal à 18, mais le prix à changé
$P = 1{,}05 + Q = 19{,}05$.

3.4 Supposez maintenant qu'une innovation technologique permettre de réduire les coûts de 20% pour les entreprises de cette branche. Combien chaque salon de coiffure pris individuellement serait prêt à investir pour acquérir cette nouvelle technologie (vous gardez les hypothèses de la question précédente) ?

A l'équilibre de LT précédent, avec P = 19,05, chaque firme se retrouve dans la situation suivante : son profit est

$PQ - 0{,}8\,C(Q) - I$ où I est le prix de l'innovation. P est égal à 19,05.

Donc pour préserver un profit positif, on doit avoir

$I < 19{,}05Q - 0{,}8\,C(Q)$

Or $19{,}05Q - 0{,}8\,C(Q) = 19{,}05Q - 0{,}8\,[162 + 1{,}05Q + 0{,}5Q^2]$

$I < 18{,}21Q - 129{,}6 - 0{,}4Q^2$.

Deux possibilités :
Solution 1 avec Q=18 (équilibre précédent) cela donne
$I < 327{,}78 - 129{,}6 - 129{,}6 =$ **68,58€**
Solution 2 la firme peut (individuellement) optimiser sa production Q*:
$P = Cm(Q)$ soit $19{,}05 = 0{,}8[1{,}05 + Q^*]$
$Q^* = (19{,}05/0{,}8) - 1{,}05 = 22{,}7625$
$I < 18{,}21Q - 129{,}6 - 0{,}4Q^2 =$ **77,65€**

3.5 Si toutes les entreprises finissent par adopter cette nouvelle technologie, décrivez le nouvel équilibre de long terme.

En négligeant le coût de l'innovation, pas de changement sur les quantités en effet, on a toujours CM = Cm, or les deux sont multipliés par 0,8. Donc cela ne change rien. Q*=18.

En revanche, l'innovation permet de réduire le prix $P = Cm = 0{,}8[1{,}05 + 18] = 15{,}24$€

Note : il est aussi possible de réécrire l'équilibre en supposant le prix de l'innovation égal à I > 0.

$CM(Q) = 0,8[162 - I + 1,05Q + 0,5Q^2]/Q$ et $Cm = 0,8[1,05 + 18]$
Du coup on détermine Q(I) et P(I) = Cm.

4. Supposez que le processus de production soit caractérisé par la fonction de coût total suivante : $C(q) = F + cq$ où F représente les coûts fixes.

4.1 Montrez que l'on est dans une situation de monopole naturel.

Lorsque deux entreprises se partagent le marché, le coût de la production conjointe de ces deux entreprises est donné par :

$$C(q_1) + C(q_2) = (F + cq_1) + (F + cq_2) = 2F + c(q_1 + q_2)$$

Avec respectivement q_1 et q_2 la quantité produite par l'entreprise 1 et par l'entreprise 2, et la production totale $Q = q_1 + q_2$.

Si une seule entreprise possède le marché, le coût de production est désormais donné par :

$$C(q_1 + q_2) = F + c(q_1 + q_2)$$

Donc

$$C(q_1 + q_2) < C(q_1) + C(q_2)$$

Avec

$$CM(q_1 + q_2) = \frac{F}{q_1 + q_2} + c$$

et

$$CM(q_1) + CM(q_2) = \frac{2F}{q_1 + q_2} + c$$

Le coût total et donc le coût moyen de production sont minimisés lorsqu'il n'existe qu'une seule entreprise sur le marché, ce qui correspond à une situation de monopole naturel.

4.2 Supposez que l'Etat impose à la seule entreprise présente sur le marché une tarification au coût marginal qui permet d'obtenir le niveau d'output socialement optimal. Quel serait le montant des pertes pour l'entreprise ?

$$\pi(p = c) = RT - CT = cq^* - (F + cq^*) = -F$$