EDHEC BUSINESS SCHOOL

CONCOURS EDHEC - ADMISSION SUR TITRES

EN PREMIERE ANNEE

8 AVRIL 2017

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 4

Aucun document ou matériel électronique n'est autorisé.

Le sujet comporte 3 exercices indépendants

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

A l'issue de chaque composition écrite, tout candidat est tenu sous peine d'élimination, de remettre au surveillant une copie (même blanche, qui sera alors signée). La seule responsabilité du candidat est engagée dans le cas contraire. Tout candidat sortant avant la fin des épreuves doit obligatoirement remettre le sujet en même temps que sa copie.

Exercice 1

On considère l'application qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy - 1$$

1) Justifier que *f* est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

2) a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de *f*.
   b) En déduire que *f* possède trois points critiques et les déterminer.

3) a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de *f*.
   b) Donner alors la nature (minimum local, maximum local ou point selle) de chacun des points critiques de *f*.

4) a) Étudier la fonction *g* qui, à tout réel *x*, associe $x(x+2)$ et dresser son tableau de variation (limites comprises).
   b) Pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, simplifier $\left(x^2 - y^2\right)^2 + 2x^2y^2 + 4xy - 1$.
   c) En déduire que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq -3$. Que peut-on conclure de cette dernière inégalité ?

Exercice 2

On considère un nombre réel λ strictement positif.

1) Montrer que la série de terme général $e^{-2\lambda k}$ est convergente et vérifier que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2\lambda k} = \frac{1}{\left(1 - e^{-\lambda}\right)\left(1 + e^{-\lambda}\right)}$$

2) On désigne par *a* et *b* deux réels et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que *A* est inversible si, et seulement si, on a : $a \neq b$.
   b) (i) Montrer que *A* est diagonalisable si, et seulement si, elle possède deux valeurs propres distinctes.
      (ii) En déduire que *A* est diagonalisable si, et seulement si, on a : $(b-1)^2 + 4a > 0$.

3) Soit *X* et *Y* deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes, et suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre λ. On pose $T = \lfloor X \rfloor$ et $U = \lfloor Y \rfloor$.
Les variables *T* et *U* sont donc les parties entières respectives de *X* et *Y* et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ (T = k) = (k \leq X < k+1) \text{ et } (U = k) = (k \leq Y < k+1)$$

   a) Calculer, pour tout entier naturel *k*, la probabilité $P(T = k)$ puis en déduire que *T* possède une espérance et une variance que l'on déterminera. On pourra remarquer que $T + 1$ suit une loi connue.
   b) Justifier que *T* et *U* sont indépendantes.
   c) On considère la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 1 & U \end{pmatrix}$. Montrer que la probabilité p_1 que *M* soit inversible est : $p_1 = \dfrac{2e^{-\lambda}}{1 + e^{-\lambda}}$.
   d) Montrer que la probabilité p_2 que *M* soit diagonalisable est : $p_2 = 1 - e^{-\lambda}\left(1 - e^{-\lambda}\right)^2$.

Problème

Pour tout endomorphisme φ de E, on pose $\varphi^0 = Id_E$, et pour tout entier naturel k non nul :

$$\varphi^k = \varphi \circ \varphi^{k-1}$$

Dans tout le problème, on désigne par E un $\mathbb{R}$- espace vectoriel de dimension n ($n \geq 2$).

On désigne par Id_E l'application identité de E.

On considère un endomorphisme f de E tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$. On dit que f est nilpotent d'indice n. On se propose d'étudier quelques propriétés de f.

Partie 1 : étude de f

1) a) Montrer que 0 est la seule valeur propre de f.
   b) En déduire que f n'est pas diagonalisable.

2) Pour tout entier naturel k, on pose : $u_k = \dim \operatorname{Ker}\left(f^k\right)$.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel k, on a l'inclusion :
   $$\operatorname{Ker}\left(f^k\right) \subset \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)$$
   b) En déduire les variations de la suite (u_k).
   c) Montrer par récurrence que s'il existe un entier i de $[\![0, n-1]\!]$ tel que $u_i = u_{i+1}$ alors :
   $$\forall j \geq i,\ \operatorname{Ker}\left(f^j\right) = \operatorname{Ker}\left(f^i\right)$$
   d) En déduire, en raisonnant par l'absurde, que :
   $$u_0 < u_1 < \ldots < u_n$$
   e) Déterminer u_0 et u_n puis utiliser les résultats précédents pour montrer que :
   $$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \dim \operatorname{Ker}\left(f^k\right) = k$$

En déduire le rang de f.

3) a) Justifier qu'il existe un vecteur e_1 de E n'appartenant pas à $\operatorname{Ker}\left(f^{n-1}\right)$.
   b) Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, on pose $e_k = f^{k-1}(e_1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E et écrire la matrice A de f dans cette base.

Partie 2 : recherche du commutant C_f de f

4) On note C_f l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f.
   a) Montrer que C_f est un $\mathbb{R}$- espace vectoriel.
   b) Justifier que pour tout élément g de C_f, il existe des réels $a_1, a_2, ..., a_n$ tels que :
   $$g\left(e_1\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, e_k = \sum_{k=1}^{n} a_k\, f^{k-1}(e_1)$$
   c) Montrer que, pour tout entier naturel k, si g appartient à C_f, alors g commute avec f^k.
   d) Montrer que pour tout élément g de C_f, on a l'égalité :
   $$\forall i \in [\![1, n]\!],\ g\left(e_i\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, f^{k-1}(e_i)$$
   e) Utiliser ce qui précède pour établir que tout élément g de C_f s'écrit : $g = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\, f^{k-1}$.

En déduire que :

$$C_f = \operatorname{Vect}\left(Id_E, f, ..., f^{n-1}\right)$$

f) Montrer, en utilisant la base $\mathcal{B}$ présentée à la 3ème question, que la famille $\left(Id_E, f, ..., f^{n-1}\right)$ est libre. En déduire la dimension de C_f.

Partie 3 : étude de quelques éléments de C_f

5) a) Simplifier, pour tout réel a, l'expression : $(1-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k$.

b) Montrer que $Id_E - f$ est un automorphisme de E et vérifier que $(Id_E - f)^{-1}$ appartient à C_f.

6) Montrer que $Id_E + f$ est un automorphisme de E et vérifier que $(Id_E + f)^{-1}$ appartient à C_f.

7) Soit u l'endomorphisme de E défini par : $u = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^i = Id_E + f + \frac{1}{2!} f^2 + ... + \frac{1}{(n-1)!} f^{n-1}$.

a) Montrer que u est bijectif et que l'on a :

$$u^{-1} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} f^j$$

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(u - Id_E) = \mathrm{Ker}(f)$.

8) a) Montrer que si un endomorphisme h de E vérifie $h^2 = f$, alors h appartient à C_f.

b) En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme h de E vérifiant $h^2 = f$.

CONCOURS EDHEC - ADMISSION SUR TITRES

EN PREMIERE ANNEE

8 AVRIL 2017

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

CORRIGE

Exercice 1

1) La fonction f est polynomiale donc elle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

2) a) Les dérivées partielles d'ordre 1 de f sont : $\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 4x^3 + 4y \\ \partial_2(f)(x,y) = 4y^3 + 4x \end{cases}$.

b) Les points critiques de f sont les points en lesquels le gradient de f est nul.

On a : $\nabla(f)(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y = 0 \\ y^3 + x = 0 \end{cases}$

$$\nabla(f)(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ -x^9 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x(1-x^8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x(1-x^8) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla(f)(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x(1-x^4)(1+x^4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4) = 0 \end{cases}$$

Les points critiques de f sont donc :

$$(0,0),\ (1,-1) \text{ et } (-1,1)$$

3) a) Les dérivées partielles d'ordre 2 de f sont : $\begin{cases} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 12x^2 \\ \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = 4 \\ \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 4 \\ \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 12y^2 \end{cases}$.

b) • La matrice hessienne de f en $(0,0)$ est :

$$H_{0,0} = \nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(0,0) & \partial^2_{1,2}(f)(0,0) \\ \partial^2_{2,1}(f)(0,0) & \partial^2_{2,2}(f)(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

• De même, la matrice hessienne de f en $(1,-1)$ est :

$$H_{1,-1} = \nabla^2(f)(1,-1) = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$$

• Et enfin, la matrice hessienne de f en $(-1,1)$ est :

$$H_{-1,1} = \nabla^2(f)(-1,1) = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$$

• Les valeurs propres de $H_{0,0}$ sont les réels λ tels que $\begin{pmatrix} -\lambda & 4 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix}$ ne soit pas inversible, ce sont donc les solutions de $\lambda^2 - 16 = 0$, c'est-à-dire : $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -4$.

• Les valeurs propres de $H_{1,-1}$ sont les réels λ tels que $\begin{pmatrix} 12-\lambda & 4 \\ 4 & 12-\lambda \end{pmatrix}$ ne soit pas inversible, ce sont donc les solutions de $(12-\lambda)^2 - 16 = 0$, c'est-à-dire : $\lambda_3 = 8$ et $\lambda_4 = 16$.

• Les valeurs propres de $H_{-1,1}$ sont aussi : $\lambda_3 = 8$ et $\lambda_4 = 16$.

Les valeurs propres de $H_{0,0}$ sont non nulles et de signe contraire donc f n'a pas d'extremum local en $(0,0)$: le point $(0,0)$ est un point selle.

Les valeurs propres de $H_{1,-1}$ et $H_{-1,1}$ sont strictement positives donc *f* a un minimum local en $(1,-1)$ et en $(-1,1)$.

Remarque. On pouvait utiliser ici, avec les notations de Monge, la "règle $rt-s^2$".

4) a) La fonction *g* est dérivable et on a : $g'(x)=2(x+1)$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x(x+2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x(x+2)=+\infty$, on a donc le tableau de variations suivant :

x	0		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

b) En développant, on trouve :

$$\left(x^2-y^2\right)^2+2x^2y^2+4xy-1=x^4+y^4-2x^2y^2+2x^2y^2+4xy-1=x^4+y^4+4xy-1$$

Conclusion :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\left(x^2-y^2\right)^2+2x^2y^2+4xy-1.$$

c) En posant $u=xy$, on a $2x^2y^2+4xy=2u^2+4u=2g(u)$.

D'après la question 4b), on a pour tout réel *u*, $g(u)\geq -1$, ce qui prouve que : $2x^2y^2+4xy\geq -2$.

Comme $f(x,y)=\left(x^2-y^2\right)^2+2x^2y^2+4xy-1$, on obtient : $f(x,y)\geq\left(x^2-y^2\right)^2-3$.

Le réel $\left(x^2-y^2\right)^2$ est positif donc :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)\geq -3$$

Comme on a $f(1,-1)=f(-1,1)=-3$, cette dernière inégalité montre que le minimum trouvé à la question 3b) est en fait un minimum global, atteint en les points $(1,-1)$ et $(-1,1)$.

Exercice 2

On considère un nombre réel λ strictement positif.

1) On peut écrire $e^{-2\lambda k}=\left(e^{-2\lambda}\right)^k$ et comme λ est strictement positif, on a $0<e^{-2\lambda}<1$, ce qui garantit que la série géométrique de raison $e^{-2\lambda}$ est convergente, et ainsi, la série de terme général $e^{-2\lambda k}$ est convergente.

On a de plus : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(e^{-2\lambda}\right)^k=\frac{1}{1-e^{-2\lambda}}=\frac{1}{1-\left(e^{-\lambda}\right)^2}=\frac{1}{\left(1-e^{-\lambda}\right)\left(1+e^{-\lambda}\right)}$.

2) a) La matrice $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & b\end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul, c'est-à-dire si, et seulement si : $1\times b-1\times a\neq 0$, soit encore : $a\neq b$.

b) **(i)** Il y a trois cas à envisager :

• Si A n'a aucune valeur propre, elle n'est évidemment pas diagonalisable.

• Si A n'a qu'une valeur propre λ et si A était diagonalisable, alors il existerait une matrice P inversible telle que $A = P\lambda I P^{-1} = \lambda I$. Comme A n'est pas scalaire, ceci est inenvisageable.

• Si A possède 2 valeurs propres, on sait que A est diagonalisable (condition suffisante : 2 valeurs propres distinctes pour une matrice d'ordre 2).

On peut conclure que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, elle possède 2 valeurs propres réelles distinctes.

(ii) On sait que λ est valeur propre de A si, et seulement si, $A-\lambda I$ n'est pas inversible, c'est-à-dire si, et seulement si, le déterminant de $A-\lambda I$ est nul.

Or, pour tout réel λ, $A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & a \\ 1 & b-\lambda \end{pmatrix}$, par conséquent les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation $(1-\lambda)(b-\lambda)-a=0$, soit : $\lambda^2-(b+1)\lambda+b-a=0$.

Cette équation possède 2 solutions **réelles** distinctes si, et seulement si, son discriminant Δ est strictement positif, c'est-à-dire si, et seulement si : $(b+1)^2-4(b-a)>0$.

Bilan : A est diagonalisable si, et seulement si, on a : $(b-1)^2+4a>0$.

3) **a)** On a $P(T=k)=P(k\le X<k+1)=\int_k^{k+1}\lambda e^{-\lambda t}dt=\left[-e^{-\lambda t}\right]_k^{k+1}$.

En calculant le crochet, on trouve : $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(T=k)=\left[-e^{-\lambda t}\right]_k^{k+1}=e^{-\lambda k}-e^{-\lambda(k+1)}=e^{-\lambda k}\left(1-e^{-\lambda}\right)$

On en déduit : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $P(T=k-1)=e^{-\lambda(k-1)}\left(1-e^{-\lambda}\right)$.

Ceci s'écrit : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $P(T+1=k)=e^{-\lambda(k-1)}\left(1-e^{-\lambda}\right)$. Comme $e^{-\lambda}>0$, on a : $1-e^{-\lambda}<1$.

De plus, $\lambda>0$ donc $e^{-\lambda}<1$ et on en déduit : $1-e^{-\lambda}>0$.

Tout ceci montre que $1-e^{-\lambda}$ appartient à $]0, 1[$ et on peut maintenant conclure que $T+1$ suit la loi géométrique de paramètre $1-e^{-\lambda}$. On en déduit : $E(T+1)=\dfrac{1}{1-e^{-\lambda}}$ et $V(T+1)=\dfrac{e^{-\lambda}}{\left(1-e^{-\lambda}\right)^2}$.

On en déduit que T possède une espérance et une variance et on a :

$$E(T)=E(T+1)-1=\frac{1}{1-e^{-\lambda}}-1=\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \text{ et } V(T)=V(T+1)=\frac{e^{-\lambda}}{\left(1-e^{-\lambda}\right)^2}$$

b) X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, donc d'après le lemme des coalitions, T et U sont aussi indépendantes.

c) On a vu (question 2) que M est inversible si et seulement si : $T\neq U$.

Cherchons la probabilité que M ne soit pas inversible, c'est-à-dire : $P(T=U)$.

Avec le système complet d'événements $(U=k)_{k\in\mathbb{N}}$, on peut écrire :

$$P(T=U)=\sum_{k=0}^{+\infty}P\left([T=U]\cap[U=k]\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}P\left([T=k]\cap[U=k]\right)$$

Par indépendance de T et U, on obtient : $P(T=U)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(T=k)P(U=k)$. Il suffit de remplacer et on trouve : $P(T=U)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(T=k)P(U=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-2\lambda k}\left(1-e^{-\lambda}\right)^2=\left(1-e^{-\lambda}\right)^2\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-2\lambda k}$.

D'après la première question, on obtient :

$$P(T=U)=(1-e^{-\lambda})^2\times\frac{1}{(1-e^{-\lambda})(1+e^{-\lambda})}=\frac{1-e^{-\lambda}}{1+e^{-\lambda}}$$

Pour finir, la probabilité que M soit inversible est : $p_1=1-\frac{1-e^{-\lambda}}{1+e^{-\lambda}}=\frac{2e^{-\lambda}}{1+e^{-\lambda}}$

$$p_1=\frac{2e^{-\lambda}}{1+e^{-\lambda}}$$

d) On a vu (question 3b) que M est diagonalisable si, et seulement si, on a : $(U-1)^2+4T>0$.

Ici, il faut remarquer que $4T$ et $(U-1)^2$ sont à valeurs positives ou nulles donc $(U-1)^2+4T>0$ est toujours vrai sauf si l'événement $(U=1)\cap(T=0)$ est réalisé.

Par indépendance de T et U, on a :

$$P([U=1]\cap[T=0])=P(U=1)P(T=0)=e^{-\lambda}(1-e^{-\lambda})(1-e^{-\lambda})=e^{-\lambda}(1-e^{-\lambda})^2$$

En conclusion, la probabilité p_2 que M soit diagonalisable est :

$$p_2=1-e^{-\lambda}(1-e^{-\lambda})^2$$

Problème

Partie 1 : étude de f

1) a) • Le polynôme X^n est annulateur de f et sa seule racine est 0. Par conséquent, 0 est la seule valeur propre possible de f.

• Si 0 n'était pas valeur propre de f, alors f serait injectif donc bijectif (f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie) et en multipliant l'égalité $f^n=0$ par f^{-1}, on obtiendrait $f^{n-1}=0$, ce qui est faux par hypothèse.

Conclusion : 0 est la seule valeur propre de f.

b) Comme 0 est la seule valeur propre de f, alors si f était diagonalisable, sa matrice dans une base de vecteurs propres serait la matrice nulle, ce qui signifierait que f est l'endomorphisme nul, et c'est faux puisque $f^{n-1}\neq 0$.

Bilan : f n'est pas diagonalisable.

2) a) Soit x un élément de $\mathrm{Ker}(f^k)$. On en déduit $f^k(x)=0$ d'où, en appliquant f qui est linéaire :

$$f^{k+1}(x)=f(f^k(x))=f(0)=0$$

Conclusion : $\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(f^k)\subset\mathrm{Ker}(f^{k+1})$.

b) L'inclusion précédente entraîne l'inégalité sur les dimensions :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \dim\mathrm{Ker}(f^k)\ \leq\ \dim\mathrm{Ker}(f^{k+1})$$

On a donc :

$$u_k\leq u_{k+1}$$

La suite (u_k) est croissante.

c) Par récurrence.

• Si $j=i$, on a évidemment $\mathrm{Ker}(f^i)=\mathrm{Ker}(f^i)$.

• Si l'on suppose, pour un entier j supérieur ou égal à i, que $\mathrm{Ker}(f^j)=\mathrm{Ker}(f^i)$, alors :

$$x \in \text{Ker}\left(f^{j+1}\right) \Leftrightarrow f^{j+1}(x) = 0 \Leftrightarrow f^{j}(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) \in \text{Ker}\left(f^{j}\right)$$

Mais, par hypothèse de récurrence, on a Ker $\left(f^{j}\right)$ = Ker $\left(f^{i}\right)$ donc :

$$x \in \text{Ker}\left(f^{j+1}\right) \Leftrightarrow f(x) \in \text{Ker}\left(f^{i}\right) \Leftrightarrow f^{i+1}(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Ker}\left(f^{i+1}\right)$$

Dans cette question, on a supposé que $u_i = u_{i+1}$, c'est-à-dire $\dim \text{Ker}\left(f^{i}\right) = \dim \ \text{Ker}\left(f^{i+1}\right)$, mais comme Ker $\left(f^{i}\right) \subset$ Ker $\left(f^{i+1}\right)$, on a l'égalité : Ker $\left(f^{i}\right)$ = Ker $\left(f^{i+1}\right)$.

Finalement, on a : $x \in \text{Ker}\left(f^{j+1}\right) \Leftrightarrow x \in \text{Ker}\left(f^{i}\right)$. Ceci veut dire que $\text{Ker}\left(f^{j+1}\right) = \text{Ker}\left(f^{i}\right)$

• On a montré par récurrence que, s'il existe un entier *i* de $[\![0, n-1]\!]$ tel que $u_i = u_{i+1}$ alors :

$$\forall j \geq i,\ \text{Ker}\left(f^{j}\right) = \text{Ker}\left(f^{i}\right)$$

d) D'après ce qui précède, s'il existait un entier *i* de $[\![0, n-1]\!]$ tel que $u_i = u_{i+1}$, alors on aurait : $\text{Ker}\left(f^{n-1}\right) = \text{Ker}\left(f^{i}\right)$ et $\text{Ker}\left(f^{n}\right) = \text{Ker}\left(f^{i}\right)$, d'où : $\text{Ker}\left(f^{n}\right) = \text{Ker}\left(f^{n-1}\right)$, ce qui est impossible puisque $f^{n-1} \neq 0$ et $f^{n} = 0$.

Par conséquent, la suite $(u_i)_{i \in [\![0, n]\!]}$ est strictement croissante. On en déduit : $u_0 < u_1 < \ldots < u_n$.

e) • On a :

$u_0 = \dim \text{Ker}\left(f^{0}\right) = \dim \text{Ker}(Id) = \dim\{0_E\} = 0$ et $u_n = \dim \text{Ker}\left(f^{n}\right) = \dim \text{Ker}(0) = \dim\{E\} = n$.

• Comme $u_0 < u_1 < \ldots < u_n$, avec $u_0 = 0$ et $u_n = n$ et comme les u_k sont $n+1$ entiers naturels (ce sont des dimensions), la seule option est : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, …, $u_n = n$.

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \dim \text{Ker}\left(f^{k}\right) = k$$

• On a donc $\dim \text{Ker}(f) = 1$ et, d'après le théorème du rang, on en déduit : $\text{rg}(f) = n-1$.

3) a) Comme $f^{n-1} \neq 0$, il existe un vecteur e_1 de *E* tel que $f^{n-1}(e_1) \neq 0$ donc il existe un vecteur e_1 de *E* n'appartenant pas à $\text{Ker}\left(f^{n-1}\right)$.

b) Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Soit *n* réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que : $\sum_{k=1}^{n} a_k e_k = 0$.

On a alors, par définition des e_k : $\sum_{k=1}^{n} a_k f^{k-1}(e_1) = 0$. (*)

• En appliquant f^{n-1} à cette égalité, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} a_k f^{n+k-2}(e_1) = 0$. Comme $f^{n} = 0$, il en va de même pour f^{n+1}, …, f^{2n-2} et il ne reste que : $a_1 f^{n-1}(e_1) = 0$. On sait que $f^{n-1}(e_1) \neq 0$ donc $a_1 = 0$.

• On poursuit par récurrence forte : supposons que pour un entier *i* de $[\![1, n-1]\!]$, on ait $a_1 = \ldots = a_i = 0$.

Dès lors, l'égalité de départ (*) devient : $\sum_{k=i+1}^{n} a_k f^{k-1}(e_1) = 0$. En appliquant f^{n-i-1} à cette égalité, on a : $\sum_{k=i+1}^{n} a_k f^{n+k-i-2}(e_1) = 0$. Comme $f^{n} = 0$, il reste $a_{i+1} f^{n-1}(e_1) = 0$ mais $f^{n-1}(e_1) \neq 0$ donc $a_{i+1} = 0$.

• On a montré par récurrence que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i = 0$.

Par conséquent, la famille (e_1, e_2, ..., e_n) est une famille libre de *n* vecteurs de *E*, qui est un espace vectoriel de dimension *n*, donc c'est une base de *E*.

Comme $e_k = f^{k-1}(e_1)$, on a, pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, $f(e_k) = f\left(f^{k-1}(e_1)\right) = f^k(e_1) = e_{k+1}$.

On a aussi $f(e_n) = f\left(f^{n-1}(e_1)\right) = f^n(e_1) = 0$. Ainsi, la matrice A de f dans la base (e_1, e_2, ..., e_n) est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie 2 : recherche du commutant C_f de f

4) a) • C_f n'est pas vide puisque *Id* appartient à C_f.

• C_f est inclus dans $\mathcal{L}(E)$.

• Si g_1 et g_2 appartiennent à C_f et si λ est un réel, alors on a :

$f \circ (g_1 + \lambda g_2) = f \circ g_1 + \lambda f \circ g_2$ (grâce à la linéarité de *f*)

$f \circ (g_1 + \lambda g_2) = g_1 \circ f + \lambda g_2 \circ f = (g_1 + \lambda g_2) \circ f$ donc $g_1 + \lambda g_2$ appartient à C_f.

Conclusion : C_f est un $\mathbb{R}$- espace vectoriel (en tant que sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

b) Comme (e_1, e_2, ..., e_n) est une base de E, tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de cette base, en particulier $g(e_1)$. Il existe donc des réels a_1, a_2, ..., a_n tels que :

$$g(e_1) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, e_k = \sum_{k=1}^{n} a_k\, f^{k-1}(e_1)$$

c) Par récurrence.

• Pour $k = 0$, on a $g \circ f^0 = g \circ Id = g = Id \circ g = f^0 \circ g$.

• Si l'on suppose que, pour un certain entier naturel k, on a $g \circ f^k = f^k \circ g$, alors :

$$g \circ f^{k+1} = g \circ (f \circ f^k) = (g \circ f) \circ f^k = (f \circ g) \circ f^k = f \circ (g \circ f^k)$$

Par hypothèse de récurrence, on obtient alors :

$$g \circ f^{k+1} = f \circ (g \circ f^k) = f \circ (f^k \circ g) = (f \circ f^k) \circ g = f^{k+1} \circ g$$

• On a montré par récurrence que, si g appartient à C_f, alors g commute avec f^k.

d) Si g est élément de C_f, on a : $g(e_i) = g\left(f^{i-1}(e_1)\right) = f^{i-1}\left(g(e_1)\right)$, car f^{i-1} et g commutent.

En remplaçant $g(e_1)$ grâce à la question 3b), on trouve : $g(e_i) = f^{i-1}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\, f^{k-1}(e_1)\right)$, et par linéarité de f^{i-1}, on a : $g(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, f^{i-1+k-1}(e_1) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, f^{k-1}\left(f^{i-1}(e_1)\right)$. Par définition de e_i, on conclut :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ g(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, f^{k-1}(e_i)$$

e) D'après la question 3d), les endomorphismes g et $\sum_{k=1}^{n} a_k f^{k-1}$ coïncident sur la base (e_1, e_2, ..., e_n) donc ils sont égaux. On a donc : $g = \sum_{k=1}^{n} a_k f^{k-1}$.

D'après ce qui vient d'être fait, tout élément g de C_f s'écrit $g = \sum_{k=1}^{n} a_k f^{k-1}$ donc la famille $\left(Id_E, f, ..., f^{n-1}\right)$ est génératrice de C_f. On a donc : $C_f = \text{Vect}\left(Id_E, f, ..., f^{n-1}\right)$.

f) Soit n réels $a_1, a_2, ..., a_n$ tels que : $\sum_{k=1}^{n} a_k f^{k-1} = 0$.

En appliquant cette égalité entre endomorphismes au vecteur e_1, on obtient $\sum_{k=1}^{n} a_k f^{k-1}\left(e_1\right) = 0$.

Comme $e_k = f^{k-1}(e_1)$, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} a_k e_k = 0$.

La famille (e_1, e_2, ..., e_n) est une base de E donc c'est une famille libre et on peut conclure :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i = 0$$

Ainsi, la famille $\left(Id_E, f, ..., f^{n-1}\right)$ est libre et comme elle engendre C_f, c'est une base de C_f et on en déduit : $\dim C_f = n$.

Partie 3 : étude de quelques éléments de C_f

5) a) $(1-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^k - \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k - \sum_{k=1}^{n} a^k = 1 - a^n$ (par télescopage).

b) $Id_E - f$ est injectif puisque 1 n'est pas valeur propre de f (question 1). Comme E est de dimension finie, $Id_E - f$ est un automorphisme de E.
La question 5a) donne l'idée de remarquer que :

$$(Id_E - f) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k = \sum_{k=0}^{n-1} f^k - \sum_{k=0}^{n-1} f^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} f^k - \sum_{k=1}^{n} f^k = Id_E - f^n$$

Comme $f^n = 0$, il reste : $(Id_E - f) \circ \left(Id_E + f + f^2 + ... + f^{n-1}\right) = Id_E$.

Ceci prouve que $(Id_E - f)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f^k$ et ainsi $(Id_E - f)^{-1}$ appartient à C_f.

6) $Id_E + f$ est injectif puisque –1 n'est pas valeur propre de f. Comme E est de dimension finie, $Id_E + f$ est un automorphisme de E.

Cette fois, on a : $(Id_E + f) \circ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^k + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} f^k$.

$(Id_E + f) \circ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^k - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f^k = Id_E - (-1)^n f^n = Id_E$.

Ceci prouve que $(Id_E + f)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^k$ et ainsi $(Id_E + f)^{-1}$ appartient à C_f.

7) a) • Soit x un élément de $\mathrm{Ker}(u)$. On a $u(x)=0$, soit :

$$x+f(x)+\frac{1}{2!}f^2(x)+...+\frac{1}{(n-1)!}f^{n-1}(x)=0 \qquad (*)$$

En appliquant f^{n-1}, il reste $f^{n-1}(x)=0$ et en remplaçant dans (*), on aurait :

$$x+f(x)+\frac{1}{2!}f^2(x)+...+\frac{1}{(n-1)!}f^{n-2}(x)=0 \qquad (**)$$

En appliquant cette fois f^{n-2}, il reste $f^{n-2}(x)=0$ et en remplaçant dans (**), on aurait :

$$x+f(x)+\frac{1}{2!}f^2(x)+...+\frac{1}{(n-1)!}f^{n-3}(x)=0$$

En opérant ainsi $n-2$ fois, on arrive à $f(x)=0$, et en remplaçant dans $x+f(x)=0$, on en déduit $x=0$.

L'endomorphisme u est donc injectif et comme il opère dans un espace vectoriel de dimension finie, c'est un automorphisme.

• De plus, on a :

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^i\right)\circ\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}f^j\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{i!}\times\frac{(-1)^j}{j!}f^i\circ f^j=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{i!}\times\frac{(-1)^j}{j!}f^{i+j}$$

On pose $k=i+j$ et on trouve :

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^i\right)\circ\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}f^j\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n+i}\frac{1}{i!}\times\frac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!}f^k$$

Comme pour tout $k\geq n$, on a $f^k=0$, il reste :

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^i\right)\circ\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}f^j\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{i!}\times\frac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!}f^k$$

Une petite astuce pour continuer :

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^i\right)\circ\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}f^j\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{i!}\times\frac{k!}{k!}\times\frac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!}f^k=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\frac{1}{k!}f^k$$

On intervertit les sommes :

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^i\right)\circ\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}f^j\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\frac{1}{k!}f^k=\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\right]\frac{1}{k!}f^k$$

Le crochet vaut 1 pour $k=0$ et 0 pour les autres valeurs de k, d'où :

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^i\right)\circ\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}f^j\right)=\frac{1}{0!}f^0=Id_E$$

Conclusion :

$$u^{-1}=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}f^j$$

b) • Soit x un élément de $\mathrm{Ker}(u-Id_E)$. On a $u(x)=x$, soit :

$$f(x)+\frac{1}{2!}f^2(x)+...+\frac{1}{(n-1)!}f^{n-1}(x)=0$$

Avec le même procédé qu'à la question 7a), on trouve $f(x)=0$ et ainsi $x\in\mathrm{Ker}(f)$.

Conclusion :

$$\mathrm{Ker}(u-Id_E)\subset\mathrm{Ker}(f)$$

• Soit x un élément de $\operatorname{Ker}(f)$. On a $f(x)=0$, d'où : $u(x)=x$, ce qui montre que $x\in\operatorname{Ker}(u-Id_E)$. On a ainsi :

$$\operatorname{Ker}(f)\subset\operatorname{Ker}(u-Id_E)$$

Bilan :

$$\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Ker}(u-Id_E)$$

8) a) Si on a $h^2=f$, alors $h\circ f=h\circ h^2=h^3$ et $f\circ h=h^2\circ h=h^3$ donc $h\circ f=f\circ h$.
Conclusion :

$$h \text{ appartient à } C_f$$

b) Par l'absurde, on a $h=a_1 Id+a_2 f+\ldots$ d'où $h^2=a_1{}^2 Id_E+2a_1a_2 f+\ldots$. Si on avait $h^2=f$, on obtiendrait : $a_1{}^2 Id_E+2a_1a_2 f+\ldots=f$ et comme la famille $\left(Id_E,f,\ldots,f^{n-1}\right)$ est libre on aurait, entre autres : $\begin{cases} a_1^2=0\\ 2a_1a_2=1\end{cases}$.

Ce système n'a pas de solution (la première équation donne $a_1=0$, ce qui n'est pas compatible avec la deuxième équation) donc il n'existe pas d'endomorphisme h de E vérifiant $h^2=f$.

ADMISSION SUR TITRES EN PREMIERE ANNEE

RAPPORT DE CORRECTION 2017

Epreuve de MATHEMATIQUES

Présentation de l'épreuve.
L'épreuve, longue comme d'habitude, comportait trois exercices, ce qui permettait de juger les candidats sur la presque totalité du programme de l'épreuve : algèbre linéaire, analyse et probabilités. Les correcteurs ont trouvé le sujet adapté et très sélectif tout en respectant scrupuleusement le programme.

- L'exercice 1, portant sur le programme d'analyse, proposait l'étude (recherche d'extrema) d'une fonction *f*, de deux variables réelles, définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy - 1$$

- L'exercice 2, portant sur les programmes d'algèbre (calcul matriciel) et de probabilités, avait pour but de calculer la probabilité pour que la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 1 & U \end{pmatrix}$ soit inversible puis de calculer la probabilité pour que M soit diagonalisable (T et U étant les parties entières de deux variables X et Y indépendantes, suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$).

- L'exercice 3, portant sur le programme d'algèbre linéaire, avait pour objectif d'étudier un endomorphisme f nilpotent d'indice n d'un espace vectoriel E (c'est-à-dire tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$), puis, dans un deuxième temps, d'en chercher le commutant, et enfin, d'étudier quelques éléments du commutant de *f*.

Statistiques.
Pour les 609 candidats ayant composé :
- La moyenne obtenue à cette épreuve est de 10,09 sur 20, très légèrement inférieure à celle de l'année dernière (moins 0,24 point)
- L'écart-type d'environ 5,11 (0,3 point au-dessous de l'année dernière)
- La médiane étant, quant à elle, égale à 9,9 (0,7 point au-dessous de celle de l'année dernière).

- 14,3 % des candidats obtiennent une note inférieure ou égale à 4, comme l'année dernière (4,6% ont une note inférieure ou égale à 2, ce qui représente deux points de moins que l'année dernière).
- 31,2 % des candidats ont entre 8 et 12 (6 points de plus que l'année dernière)
- 7,1 % des candidats obtiennent une note supérieure ou égale à 18 (3,5 points de moins que l'année dernière).

Analyse des copies.
Les correcteurs notent une fois encore que le niveau est très hétérogène, ceci étant, comme d'habitude, dû aux origines scolaires et universitaires diverses des candidats.
Mis à part, d'un côté quelques très brillants candidats ayant des connaissances bien supérieures à celles exigées par le programme, et de l'autre, un certain nombre de candidats très mal préparés ayant des notes extrêmement basses (ces candidats connaissent souvent les concepts, parfois pas, mais ne les maîtrisent pas du tout), les correcteurs trouvent l'ensemble d'un niveau honorable, tout en regrettant

que de très nombreux candidats, certainement par manque de temps pour préparer cette épreuve, aient fait l'impasse sur les probabilités. Les notes sont plus "resserrées" que lors des sessions précédentes (il y a moins de très mauvaises notes mais aussi, moins de très bonnes notes).

En ce qui concerne la crédibilité des copies, signalons les quelques points suivants :

Exercice 1

- Certains candidats ne connaissaient visiblement pas cette partie du programme concernant les fonctions de plusieurs variables réelles.
- Peu de candidats sont réellement crédibles sur la résolution du système $\begin{cases} x^3+y=0 \\ y^3+x=0 \end{cases}$, certains, en assez grand nombre, pensant que $\left(x^3\right)^3=x^6$, et la majorité donnant les trois solutions comme évidentes, ce qui, bien entendu, n'est pas une réponse acceptable.
- Rares sont les candidats qui prouvent correctement que la fonction *f* est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

- Trop de candidats n'ont pas su reconnaître une série géométrique à la première question.
- Quelques confusions entre la loi de Poisson (discrète) et la loi exponentielle (à densité).
- L'indépendance de deux variables T et U à valeurs dans $\mathbb{N}$ ne se montre pas en vérifiant que $P([T=k]\cap[U=k])=P(T=k)P(U=k)$ pour tout entier naturel *k*, mais en montrant $P([T=j]\cap[U=k])=P(T=j)P(U=k)$ pour tous entiers naturels *j* et *k*.
- Rappelons que les notions de déterminant, polynôme caractéristique et polynôme minimal ne sont pas au programme. Les correcteurs ont, malgré tout, accepté l'utilisation du déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2.

À propos de polynôme caractéristique, trop de candidats ne connaissent pas leur cours et pensent qu'une matrice est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé à racines simples, ce qui est faux.

Exercice 3

- La notion d'endomorphisme nilpotent et les propriétés s'y attachant ne sont pas au programme.
- Rappelons que le contraire de « la suite *u* est strictement croissante » n'est pas « la suite *u* est décroissante (strictement ou pas d'ailleurs) ».
- Beaucoup de candidats affirment que, comme 0 est valeur propre (ou comme c'est la seule), alors *f* n'est pas diagonalisable… Ici aussi, ce genre de réponse, sans argumentation, n'est pas crédible.
- Un nombre important de candidats ont confondu vecteurs et endomorphismes.
- Un trop grand nombre de candidats semblent penser que noyau et image d'un endomorphisme sont supplémentaires, alors qu'ici, on avait, par exemple $\mathrm{Im}\left(f^{n-1}\right)\subset\mathrm{Ker}\left(f^{n-1}\right)$!
- Rappelons que la somme de deux automorphismes n'est pas (ou rarement) un automorphisme. À ce sujet, la confusion entre endomorphisme et automorphisme semble très fréquente.

Conclusion.

L'épreuve a permis de repérer et de mettre en valeur les candidats les mieux préparés (il y en a de très bons) et les plus aptes à trouver leur place dans des études exigeantes qui nécessitent rigueur et honnêteté intellectuelle.

Nous conseillons, comme par le passé, aux futurs candidats de se préparer d'une façon complète, en essayant de ne négliger aucun point du programme : les trois "compartiments" de ce programme (analyse, algèbre linéaire et probabilités) sont essentiels pour une bonne continuation des études à l'EDHEC.

Pour terminer, les correcteurs rappellent que les candidats doivent s'en tenir strictement aux termes du programme de cette épreuve (disponible sur le site de l'EDHEC).