EDHEC BUSINESS SCHOOL

CONCOURS EDHEC - ADMISSION SUR TITRES

EN PREMIERE ANNEE

7 AVRIL 2018

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 4

Aucun document ou matériel électronique n'est autorisé.

Le sujet comporte 3 exercices indépendants

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

A l'issue de chaque composition écrite, tout candidat est tenu sous peine d'élimination, de remettre au surveillant une copie (même blanche, qui sera alors signée). La seule responsabilité du candidat est engagée dans le cas contraire. Tout candidat sortant avant la fin des épreuves doit obligatoirement remettre le sujet en même temps que sa copie.

Exercice 1

Pour tout entier naturel *n*, on pose $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{nx} dx$ et on a bien sûr $I_0 = \int_0^1 dx = 1$.

L'objectif de cet exercice est de trouver un équivalent de I_n *lorsque n tend vers* $+\infty$.

1) Montrer que : $\forall x \in [0,1[,\ x + \ln(1-x) \leq -\frac{1}{2}x^2$.

2) Calculer I_1.

3) a) Étudier sur $\mathbb{R}$ la fonction $h : x \mapsto (1-x)e^x - 1$ puis donner son signe.
   b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.

4) a) Utiliser la question 1) pour établir que :

$$I_n \leq \int_0^1 e^{-nx^2/2} dx$$

   b) On rappelle que la fonction qui, à tout réel *x*, associe $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité d'une variable aléatoire *X* suivant la loi normale de paramètres *m* et σ^2. En déduire l'inégalité :

$$I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

   c) En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

5) a) Montrer que, pour tout σ de $]0,1[$, on a : $\forall x \in [0, 1-\sigma^2],\ x + \ln(1-x) \geq -\frac{x^2}{2\sigma^2}$.
   b) En déduire que, pour tout σ de $]0,1[$, on a : $I_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}(1-\sigma^2)} e^{-u^2/2\sigma^2} du$

6) Recherche d'un équivalent de I_n.
   a) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}(1-\sigma^2)} e^{-u^2/2\sigma^2} du$ et en déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a, pour *n* assez grand :

$$\forall \sigma \in]0,1[,\ \sqrt{\frac{2n}{\pi}} I_n \geq \sigma - \varepsilon$$

   b) Donner enfin un équivalent de I_n lorsque *n* tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Pour tout couple (i, j) de $[\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le seul terme non nul est égal à 1 et est situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne. On rappelle que la famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice *D*, élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonale et dont les éléments diagonaux sont 2 à 2 distincts. On note d_i l'élément de *D* situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $i^{\text{ème}}$ colonne.
On note *u* l'application qui à toute matrice *M* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe la matrice $u(M) = DM - MD$.

1) Montrer que *u* est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on notera $m_{i,j}$ l'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne. En distinguant les cas $i \neq j$ et $i = j$, exprimer l'élément de $u(M)$ situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne en fonction de $m_{i,j}$, d_i et d_j.

3) a) En déduire que $\operatorname{Ker}(u)$ est l'ensemble des matrices diagonales.
   b) Montrer que $\operatorname{Im}(u)$ est inclus dans l'ensemble E des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont nuls.
   c) Déduire des deux questions précédente que $\operatorname{Im}(u) = E$.

4) a) Montrer que $u(E_{i,j}) = (d_i - d_j)E_{i,j}$.
   b) En déduire que u est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

5) On considère une matrice A semblable à D ainsi que l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe la matrice $f(M) = AM - MA$.
On note P la matrice inversible telle que $A = PDP^{-1}$. Montrer que la famille $\left(PE_{i,j}P^{-1}\right)_{1\le i,j\le n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que f est diagonalisable.

6) On considère, dans cette question, le cas particulier $n = 2$ et on donne $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.
   a) Déterminer les valeurs propres de A puis montrer que A est diagonalisable.
   b) Déterminer les sous-espaces propres de A puis expliciter, sur cet exemple, une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de f. Donner les valeurs propres associées.

Problème

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Soit a un réel de $[0,2]$ et f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} a & \text{si } -\frac{1}{2} \le x \le 0 \\ 2-a & \text{si } 0 < x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1) Montrer que la fonction f est une densité.

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f.

2) a) Pour quelles valeurs de a, X suit-elle une loi uniforme ?
   b) Préciser, dans chaque cas, la loi suivie par X.

On revient au cas général.

3) Montrer que X possède une espérance et une variance que l'on donnera sous forme d'une fraction.

4) On note F_X la fonction de répartition de X.
   a) Déterminer $F_X(x)$ selon que $x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \le x < 0$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$ et $x > \frac{1}{2}$
   b) En déduire la médiane de X, c'est-à-dire le réel μ vérifiant $F_X(\mu) = \frac{1}{2}$. On distinguera les cas $a \le 1$ et $a > 1$.

c) En déduire également la valeur de la probabilité $P_{(X>0)}(X>1/4)$.

5) On suppose, dans cette question seulement, que $a\in\,]0,2[$ et on note G la restriction de F_X à l'intervalle $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

a) Montrer que G est une bijection de $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ dans $[0,1]$.

b) On note U la variable aléatoire définie par : $U=G(X)$. Donner la loi de U.

c) Montrer que la bijection réciproque de G, notée G^{-1}, est définie par :

$$G^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-a}{2a} & \text{si } 0\leq x\leq \dfrac{a}{2}\\[2mm] \dfrac{2x-a}{2(2-a)} & \text{si } \dfrac{a}{2}<x\leq 1\end{cases}$$

d) En remarquant que $X=G^{-1}(U)$, compléter l'algorithme suivant afin qu'il permette de calculer la valeur prise par X à partir de la fonction, notée ici u, qui renvoie au hasard un réel de $[0,1]$, c'est-à-dire qui simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
Aucune connaissance informatique, ni aucune syntaxe spéciale ne sont exigées, seule la compréhension importe.

```
Donner une valeur pour a
Si u est inférieur ou égal à a/2    alors X = ------
                                    sinon X = ------
Afficher X
```

On suppose désormais que le paramètre a est inconnu et on souhaite l'estimer.

6) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(X_1,X_2,...,X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et on pose $Z_n=1-\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$.

a) Montrer que la variable aléatoire Z_n est un estimateur sans biais de a.

b) Calculer le risque quadratique $r_0(Z_n)$ de Z_n. La variable aléatoire Z_n est-elle un estimateur convergent de a ?

7) Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on considère la variable aléatoire U_n égale au nombre de variables aléatoires parmi $X_1,X_2,...,X_n$ qui prennent des valeurs inférieures ou égales à 0.

a) Reconnaître la loi de U_n.

b) Déterminer le réel α_n tel que $V_n=\alpha_n U_n$ soit un estimateur sans biais de a.

c) Cet estimateur est-il un estimateur convergent de a ?

8) On se propose de chercher un intervalle de confiance pour a à partir de l'estimateur V_n.

a) Vérifier que $a(2-a)\leq 1$.

b) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable V_n.

c) En déduire l'inégalité : $P(V_n-\varepsilon\leq a\leq V_n+\varepsilon)\geq 1-\frac{1}{n\varepsilon^2}$.

d) Donner enfin une valeur de n pour laquelle $\left[V_n-\frac{1}{20},V_n+\frac{1}{20}\right]$ est un intervalle de confiance pour a avec un niveau de confiance au moins égal à 95%.

CONCOURS EDHEC - ADMISSION SUR TITRES

EN PREMIERE ANNEE

7 AVRIL 2018

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

CORRIGE

EDHEC BUSINESS SCHOOL

Exercice 1

1) On étudie la fonction g, qui à tout réel x de $[0,1[$ associe $g(x)=-\frac{1}{2}x^2-x-\ln(1-x)$.

g est bien sûr dérivable (somme de fonctions usuelles dérivables) et : $g'(x)=-x-1+\frac{1}{1-x}=\frac{x^2}{1-x}$

La fonction g' est strictement positive sur $]0,1[$ donc g est strictement croissante sur $[0,1[$. Comme $g(0)=0$, on a : $\forall x\in[0,1[,\ g(x)\geq 0$. Ceci signifie :

$$\boxed{\forall x\in[0,1[,\ x+\ln(1-x)\leq -\frac{1}{2}x^2}$$

2) On a $I_1=\int_0^1(1-x)e^x dx$. On procède par intégration par parties avec $u(x)=1-x$, $v'(x)=e^x$. On a alors $u'(x)=-1$ et on peut choisir $v(x)=e^x$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$ et on trouve :

$$I_1=[(1-x)e^x]_0^1+\int_0^1 e^x dx=-1+e-1=e-2$$

3) a) La fonction h est dérivable en tant que produit de fonctions usuelles dérivables et on a :

$$h'(x)=(1-x)e^x-e^x=-xe^x$$

h' est du signe contraire de x (ne s'annulant qu'en 0) donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. La fonction h est donc maximale en 0 et comme $h(0)=0$, on peut conclure que h est négative.

b) $I_{n+1}-I_n=\int_0^1(1-x)^{n+1}e^{(n+1)x}dx-\int_0^1(1-x)^n e^{nx}dx$. Par linéarité de l'intégration puis en factorisant la fonction intégrée, on obtient :

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1(1-x)^n e^{nx}\left((1-x)e^x-1\right)dx=\int_0^1(1-x)^n e^{nx}h(x)dx$$

Les bornes de cette intégrale sont dans l'ordre croissant et la fonction intégrée est négative sur $[0,1]$ donc $I_{n+1}-I_n\leq 0$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

La suite (I_n) est décroissante et minorée (par 0) donc elle est convergente.

4) a) D'après la question 1), on a : $\forall x\in[0,1[,\ x+\ln(1-x)\leq -\frac{1}{2}x^2$.

On peut prendre l'exponentielle qui est croissante sur $\mathbb{R}$, ce qui donne : $e^x(1-x)\leq e^{-x^2/2}$.

Cette inégalité reste valable pour $x=1$ (puisqu'elle donne $0\leq e^{-1/2}$) donc on a :

$$\forall x\in[0,1],\ e^x(1-x)\leq e^{-x^2/2}$$

En élevant à la puissance n-ième (fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$), on trouve :

$$\forall x\in[0,1],\ e^{nx}(1-x)^n\leq e^{-nx^2/2}$$

En intégrant de 0 à 1 (bornes dans l'ordre croissant), on obtient :

$$\boxed{I_n\leq\int_0^1 e^{-nx^2/2}dx}$$

b) En considérant une variable aléatoire X suivant la loi normale de paramètres 0 et $\frac{1}{n}$, une densité de X est la fonction φ définie par : $\varphi(x)=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\times\frac{1}{n}}}=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}e^{-nx^2/2}$. On sait que $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx=1$, ce qui donne $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-nx^2/2}dx=\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$. Comme la fonction intégrée est paire, on en déduit :

$$\int_0^{+\infty}e^{-nx^2/2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}=\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

La fonction intégrée étant positive, on a $\int_0^1 e^{-nx^2/2}dx\le\int_0^{+\infty}e^{-nx^2/2}dx$, d'où : $\int_0^1 e^{-nx^2/2}dx\le\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Pour finir, avec le résultat de la question 4a), on trouve bien :

$$\boxed{I_n\le\sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

c) On a $0\le I_n\le\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}=0$ donc, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}I_n=0}.$$

5) a) En notant k la fonction définie sur $[0,1-\sigma^2]$ par $k(x)=-\frac{x^2}{2\sigma^2}-x-\ln(1-x)$, on a, (calcul similaire à celui de la première question) : : $k'(x)=-\frac{x}{\sigma^2}-1+\frac{1}{1-x}=-\frac{x}{\sigma^2}+\frac{x}{1-x}=\frac{x^2-(1-\sigma^2)x}{\sigma^2(1-x)}$.

En factorisant : $k'(x)=\frac{x(x-(1-\sigma^2))}{\sigma^2(1-x)}$ Comme $x\in[0,1-\sigma^2]$, $x(x-(1-\sigma^2))$ est négatif donc k' est strictement négative sur $[0,1-\sigma^2]$, et ainsi k est strictement décroissante sur $[0,1-\sigma^2]$. Comme $k(0)=0$, on a : $\forall x\in[0,1-\sigma^2]$, $k(x)\le 0$. Ceci signifie :

$$\boxed{\forall x\in[0,1-\sigma^2],\ x+\ln(1-x)\ge-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

b) On peut une nouvelle fois prendre l'exponentielle qui est croissante sur $\mathbb{R}$, ce qui donne :

$$\forall x\in[0,1-\sigma^2],\ e^x(1-x)\ge e^{-x^2/2\sigma^2}$$

En élevant à la puissance n-ième (fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$), on trouve :

$$\forall x\in[0,1-\sigma^2],\ e^{nx}(1-x)^n\ge e^{-nx^2/2\sigma^2}$$

En intégrant de 0 à $1-\sigma^2$ (bornes dans l'ordre croissant), on obtient :

$$\int_0^{1-\sigma^2}e^{nx}(1-x)^n\,dx\ge\int_0^{1-\sigma^2}e^{-nx^2/2\sigma^2}dx$$

Par positivité de la fonction intégrée, on a : $\int_0^1 e^{nx}(1-x)^n\,dx\ge\int_0^{1-\sigma^2}e^{nx}(1-x)^n\,dx$, d'où :

$$I_n\ge\int_0^{1-\sigma^2}e^{-nx^2/2\sigma^2}dx$$

En effectuant le changement d'indice $u = x\sqrt{n}$, qui est bien de classe C^1 sur $[0, 1-\sigma^2]$, on obtient :

$$I_n \geq \int_0^{\sqrt{n}(1-\sigma^2)} e^{-u^2/2\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{n}} du$$

Finalement :

$$\boxed{\forall \sigma \in]0,1[,\ I_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}(1-\sigma^2)} e^{-u^2/2\sigma^2} du}$$

6) a) En considérant une variable aléatoire Y suivant la loi normale de paramètres 0 et σ^2, une densité de X est la fonction φ définie par : $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. On sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1$, ce qui donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \sigma\sqrt{2\pi}$. Comme la fonction intégrée est paire, on en déduit :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \frac{1}{2}\sigma\sqrt{2\pi} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

On a donc immédiatement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}(1-\sigma^2)} e^{-u^2/2\sigma^2} du = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

On a $I_n \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}(1-\sigma^2)} e^{-u^2/2\sigma^2} du$ donc $\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} I_n \geq \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}(1-\sigma^2)} e^{-u^2/2\sigma^2} du$.
Le membre de droite tend vers σ lorsque n tend vers $+\infty$ donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel on a : $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}(1-\sigma^2)} e^{-u^2/2\sigma^2} du \geq \sigma - \varepsilon$.
On en déduit :

$$\boxed{\forall \sigma \in]0,1[,\ \sqrt{\frac{2n}{\pi}} I_n \geq \sigma - \varepsilon}$$

b) En faisant tendre σ vers 1, on obtient : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} I_n \geq 1 - \varepsilon$.

On a vu à la question 4b) que $I_n \leq \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, soit : $\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} I_n \leq 1$. En tout, on obtient :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $1 \geq \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} I_n \geq 1 - \varepsilon$.

Par définition d'une limite, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} I_n = 1$.

Conclusion :

$$\boxed{I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

Exercice 2

1) • La matrice D est élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est stable pour la soustraction et le produit matriciel donc, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$u(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

• Si on se donne deux matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un réel λ, on a, grâce aux propriétés du produit matriciel :

$u(M+\lambda N)=D(M+\lambda N)-(M+\lambda N)D=DM+\lambda DN-MD-\lambda ND$.

$u(M+\lambda N)=(DM-MD)+\lambda(DN-ND)=u(M)+\lambda u(N)$.

Les deux points précédents prouvent que :

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

2) On a $u(M)=DM-MD$.

L'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice DM est $\sum_{k=1}^{n} d_{i,k}m_{k,j}=d_{i,i}m_{i,j}=d_i m_{i,j}$ (car tous les $d_{i,k}$ sont nuls sauf $d_{i,i}$ qui est noté d_i).

L'élément situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice MD est $\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}d_{k,j}=m_{i,j}d_{j,j}=d_j m_{i,j}$ (pour des raisons identiques).

Pour conclure, l'élément de $u(M)$ situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est :

$$\boxed{(u(M))_{i,j}=(d_i-d_j)m_{i,j}}$$

Pour $i=j$, on obtient :

$$\boxed{(u(M))_{i,i}=0}$$

3) a) On a : $u(M)=0 \Leftrightarrow \forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ (d_i-d_j)m_{i,j}=0 \Leftrightarrow \forall i\neq j,\ (d_i-d_j)m_{i,j}=0$ (si $i=j$ l'égalité est triviale).

Comme les éléments diagonaux de D sont deux à deux distincts, on a : $u(M)=0 \Leftrightarrow \forall i\neq j,\ m_{i,j}=0$.

Ceci veut dire que les éléments non diagonaux de M sont nuls, donc que M est diagonale.

Conclusion : $\mathrm{Ker}(u)$ est l'ensemble des matrices diagonales.

b) On vient de le signaler : les éléments diagonaux de $u(M)$ sont $(d_i-d_i)m_{i,i}=0$ donc $\mathrm{Im}(u)$ est inclus dans l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont nuls.

c) La dimension de $\mathrm{Ker}(u)$ est égale à n donc, d'après le théorème du rang : $\dim \mathrm{Im}(u)=n^2-n$.

Or l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont nuls est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par la famille des n^2 matrices élémentaires $E_{i,j}$ sauf $E_{1,1},E_{2,2},\dots,E_{n,n}$.

Par conséquent E est de dimension n^2-n.

Finalement : $\mathrm{Im}(u)\subset E$ et $\dim \mathrm{Im}(u)=\dim E$ donc :

$$\boxed{\mathrm{Im}(u)=E}$$

4) a) D'après le calcul fait à la question 2), le terme de la matrice $u(E_{i,j})$ situé à l'intersection de la k-ième ligne et de la ℓ-ième colonne est $(u(E_{i,j}))_{k,\ell}=(d_k-d_\ell)(E_{i,j})_{k,\ell}$

Comme le seul terme non nul de $E_{i,j}$ (égal à 1) est $(E_{i,j})_{i,j}$, tous les termes de $u(E_{i,j})$ sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut :

$$(u(E_{i,j}))_{i,j}=(d_i-d_j)(E_{i,j})_{i,j}=(d_i-d_j)\times 1=d_i-d_j$$

On a donc :

$$\boxed{u\left(E_{i,j}\right)=\left(d_i-d_j\right)E_{i,j}}$$

b) Ce qui précède montre que les n^2 matrices $E_{i,j}$ sont vecteurs propres de u associés respectivement aux valeurs propres d_i-d_j.
On peut conclure que u est diagonalisable et que ses valeurs propres sont les d_i-d_j.

5) Soit n^2 réels $\alpha_{i,j}$ tels que $\sum\limits_{1\le i,j\le n}\alpha_{i,j}PE_{i,j}P^{-1}=0$. Ceci s'écrit : $P\left(\sum\limits_{1\le i,j\le n}\alpha_{i,j}E_{i,j}\right)P^{-1}=0$.
En multipliant chaque membre, à gauche par P^{-1} et à droite par P, il reste : $\sum\limits_{1\le i,j\le n}\alpha_{i,j}E_{i,j}=0$.
Comme la famille $\left(E_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est une famille libre et on en déduit que tous les coefficients $\alpha_{i,j}$ sont nuls.
Conclusion : $\left(PE_{i,j}P^{-1}\right)_{1\le i,j\le n}$ est une famille libre et comme elle contient n^2 matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
En notant $F_{i,j}=PE_{i,j}P^{-1}$, on a : $f\left(F_{i,j}\right)=f\left(PE_{i,j}P^{-1}\right)=APE_{i,j}P^{-1}-PE_{i,j}P^{-1}A$. Comme $A=PDP^{-1}$, on a $AP=PD$ et $P^{-1}A=DP^{-1}$ et en remplaçant, on trouve :

$$f\left(F_{i,j}\right)=PDE_{i,j}P^{-1}-PE_{i,j}DP^{-1}=P\left(DE_{i,j}-E_{i,j}D\right)P^{-1}$$

Or $DE_{i,j}-E_{i,j}D=u\left(E_{i,j}\right)=\left(d_i-d_j\right)E_{i,j}$ donc :

$$f\left(F_{i,j}\right)=P\left(\left(d_i-d_j\right)E_{i,j}\right)P^{-1}=\left(d_i-d_j\right)PE_{i,j}P^{-1}=\left(d_i-d_j\right)F_{i,j}$$

On a vu plus haut que la famille $\left(F_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, or elle est formée de vecteurs propres de f, respectivement associés aux valeurs propres d_i-d_j, donc :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$$

6) a) On a $A-\lambda I=\begin{pmatrix}7-\lambda & 6\\ -4 & -3-\lambda\end{pmatrix}$
Les valeurs propres de A sont les réels λ pour lesquels $A-\lambda I$ n'est pas inversible, c'est-à-dire pour lesquels : $(7-\lambda)(-3-\lambda)-6\times(-4)=0$
Les valeurs propres de la matrice A sont donc les solutions de : $\lambda^2-4\lambda+3=0$.
Après calcul du discriminant $\Delta=4$, on conclut :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont } 1 \text{ et } 3}$$

A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et possède 2 valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.

b) On trouve le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 en résolvant $AX=X$, avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, ce qui donne $\begin{cases}7x+6y=x\\-4x-3y=y\end{cases}$, ou encore $\begin{cases}6x+6y=0\\-4x-4y=0\end{cases}$ et se réduit à : $x+y=0$.

On a donc $X=\begin{pmatrix}x\\-x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre de } A \text{ associé à la valeur propre 1 est } \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)}$$

On trouve le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 3 en résolvant : $AX=3X$, avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, ce qui donne $\begin{cases}7x+6y=3x\\-4x-3y=3y\end{cases}$, ou encore $\begin{cases}4x+6y=0\\-4x-6y=0\end{cases}$. La première équation est la même que la deuxième (au signe près) donc il reste $4x+6y=0$, soit : $2x+3y=0$.

On a donc $X=\begin{pmatrix}x\\-(2/3)x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\-(2/3)\end{pmatrix}$ et comme le vecteur $\begin{pmatrix}1\\-(2/3)\end{pmatrix}$ est proportionnel à $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$:

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre de } A \text{ associé à la valeur propre 3 est } \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\right)}$$

Les vecteurs de base de ces sous-espaces propres donnent une matrice P possible : $P=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}$, dans ce cas on a $D=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$ et on trouve (peu importe la méthode) : $P^{-1}=\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}$.

D'après la question 5), une base de vecteurs propres de f est $(F_{1,1}, F_{1,2}, F_{2,1}, F_{2,2})$, avec $F_{i,j}=PE_{i,j}P^{-1}$, ce qui donne :

$$F_{1,1}=PE_{1,1}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-3\\2&3\end{pmatrix}.$$

$$F_{1,2}=PE_{1,2}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}.$$

$$F_{2,1}=PE_{2,1}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&-9\\4&6\end{pmatrix}.$$

$$F_{2,2}=PE_{2,2}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\-2&-2\end{pmatrix}.$$

D'après la question 5), $F_{1,1}$ et $F_{2,2}$ sont vecteurs propres de f associés à la valeur propre $\lambda_1=0$, $F_{1,2}$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_2=1-3=-2$ et $F_{2,1}$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_3=3-1=2$.

Problème

1) • La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$, et comme a appartient à $]0,1[$, a et $2-a$ sont positifs donc f est positive sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ et comme f est nulle ailleurs que sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$.

• Les restrictions de f aux intervalles $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$, $\left]-\frac{1}{2},0\right[$, $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ sont constantes donc continues, ce qui fait que f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en $-\frac{1}{2}$, 0 et $\frac{1}{2}$.

- f est nulle sur les intervalles $\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ donc on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1/2} f(t)\,dt=\int_{1/2}^{+\infty} f(t)\,dt=0$.

Ensuite, on a : $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} f(t)\,dt=\int_{-1/2}^{0} a\,dt=\frac{a}{2}$ et $\displaystyle\int_{0}^{1/2} f(t)\,dt=\int_{0}^{1/2}(2-a)\,dt=\frac{2-a}{2}$.

En regroupant, on obtient : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt=\frac{a}{2}+\frac{2-a}{2}=1$.

Les trois points précédents prouvent que :

$$\boxed{f \text{ est une densité}}$$

2) a) La loi de X est uniforme si, et seulement si, la fonction f est constante sur un intervalle borné et nulle ailleurs, ce qui est le cas si $a=0$, $a=1$ ou $a=2$.

b) Pour $a=0$, X suit la loi uniforme sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

Pour $a=1$, X suit la loi uniforme sur $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

Pour $a=2$, X suit la loi uniforme sur $\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$.

3) Les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1/2} t\,f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty} t\,f(t)\,dt$ sont nulles donc il n'y a aucun problème de convergence à soulever et on a :

$\displaystyle\int_{-1/2}^{0} t\,f(t)\,dt=a\int_{-1/2}^{0} t\,dt=-\frac{a}{8}$ et $\displaystyle\int_{0}^{1/2} t\,f(t)\,dt=(2-a)\int_{0}^{1/2} t\,dt=\frac{2-a}{8}$.

En conclusion, X possède une espérance $E(X)=\dfrac{-a}{8}+\dfrac{2-a}{8}$, ce qui, une fois simplifié, donne :

$$\boxed{E(X)=\frac{1-a}{4}}$$

De même, on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1/2} t^2 f(t)\,dt=\int_{1/2}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt=0$.

On a aussi : $\displaystyle\int_{-1/2}^{0} t^2 f(t)\,dt=a\int_{-1/2}^{0} t^2 dt=\frac{a}{24}$ et $\displaystyle\int_{0}^{1/2} t^2 f(t)\,dt=(2-a)\int_{0}^{1/2} t^2 dt=\frac{2-a}{24}$.

En regroupant, on trouve : $E\left(X^2\right)=\dfrac{1}{12}$ et on en déduit : $V(X)=\dfrac{1}{12}-\dfrac{(1-a)^2}{16}$.

Bilan :

$$\boxed{V(X)=\frac{1+6a-3a^2}{48}}$$

4) a) Comme $X(\Omega)=\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$, on a d'ores et déjà : $F_X(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<-1/2\\ 1 \text{ si } x>1/2\end{cases}$.

Pour tout x de $\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$, on a $F_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{-x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{-1/2} 0\,dt+\int_{-1/2}^{x} a\,dt=a\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

Pour tout x de $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, on a $F_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{-x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{-1/2} 0\,dt+\int_{-1/2}^{0} a\,dt+\int_{0}^{x}(2-a)\,dt=\frac{a}{2}+(2-a)x$.

Conclusion :

$$\boxed{F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<-1/2\\ a\left(x+\dfrac{1}{2}\right) & \text{si } -1/2\le x<0\\ \dfrac{a}{2}+(2-a)x & \text{si } 0\le x\le 1/2\\ 1 & \text{si } x>1/2\end{cases}}$$

b) Sur les intervalles $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, $F_X(x)$ est soit nul soit égal à 1 donc différent de $\frac{1}{2}$.
La médiane de X appartient donc, soit à $\left[-\frac{1}{2},0\right[$, soit à $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.
Sur $\left[-\frac{1}{2},0\right[$, $a\left(x+\frac{1}{2}\right)$ appartient à $\left[0,\frac{a}{2}\right[$ et sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\frac{a}{2}+(2-a)x$ appartient à $\left[\frac{a}{2},2-\frac{a}{2}\right]$: il faut donc distinguer deux cas :

- Soit a est inférieur ou égal à 1 et on a $F_X(x)<\frac{1}{2}$ sur $\left[-\frac{1}{2},0\right[$. Par conséquent, la médiane de X appartient à $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Dès lors, on résout : $\frac{a}{2}+(2-a)x=\frac{1}{2}$, ce qui donne $(2-a)x=\frac{1-a}{2}$ dont la solution est :

$$\boxed{\mu=\frac{1-a}{2(2-a)}}$$

- Soit a est strictement supérieur à 1 et $F_X(x)>\frac{1}{2}$ sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Par conséquent, la médiane de X appartient à $\left]-\frac{1}{2},0\right[$. Dès lors, on résout : $a\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, ce qui donne $2x+1=\frac{1}{a}$ dont la solution est :

$$\boxed{\mu=\frac{1-a}{2a}}$$

c) Tout d'abord, si $a=2$, l'événement $(X>0)$ est impossible, d'après la question 2b).
Sinon, on a :

$$P_{(X>0)}(X>1/4)=\frac{P([X>1/4]\cap[X>0])}{P(X>0)}=\frac{P(X>1/4)}{P(X>0)}, \text{ car } (X>1/4)\subset(X>0).$$

On en déduit : $P_{(X>0)}(X>1/4)=\dfrac{1-F_X(1/4)}{1-F_X(0)}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{a}{4}}{1-\frac{a}{2}}$.

Conclusion :

$$\boxed{P_{(X>0)}(X>1/4)=\frac{1}{2}}$$

5) a) La fonction G est définie par : $G(x)=\begin{cases} a\left(x+\dfrac{1}{2}\right) & \text{si } -1/2\le x<0 \\ \dfrac{a}{2}+(2-a)x & \text{si } 0\le x\le 1/2 \end{cases}$.

- On sait que G est continue sur $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ puisque F_X l'est.
- De plus, G est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$ car $G'(x)=a>0$, et à valeurs dans $\left[0,\dfrac{a}{2}\right[$.

G est aussi strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ car $G'(x)=2-a>0$, et à valeurs dans $\left[\dfrac{a}{2},1\right]$. Par continuité de G en 0, on a la stricte croissance de G sur $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

- Pour finir, on a $G\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ et $G\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$, ce qui montre que G arrive dans $[0,1]$.

Bilan : G est continue et strictement croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ et à valeurs dans $[0,1]$ donc c'est une bijection de $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ dans $[0,1]$.

b) • Comme X prend ses valeurs dans $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ et comme G est une bijection de $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ dans $[0,1]$, on sait que : $U(\Omega)=[0,1]$.

• Pour tout x de $[0,1]$, on a :

$F_U(x)=P(U\le x)=P(G(X)\le x)=P(X\le G^{-1}(x))=F_X(G^{-1}(x))$.

Comme $G^{-1}(x)$ appartient à $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$, on a $F_X(G^{-1}(x))=G(G^{-1}(x))=x$.

D'après les deux points précédents, on peut conclure :

$$\boxed{U \text{ suit la loi uniforme sur } [0,1]}$$

c) On résout pour tout x dans $[0,1]$ l'équation $x=G(t)$ d'inconnue t élément de $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

Il y a deux cas :

- Si x appartient à $\left[0,\dfrac{a}{2}\right[$: $x=G(t)\Leftrightarrow x=a\left(t+\dfrac{1}{2}\right)\Leftrightarrow t=\dfrac{x}{a}-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow t=\dfrac{2x-a}{2a}$.
- Si x appartient à $\left[\dfrac{a}{2},1\right]$: $x=G(t)\Leftrightarrow x=\dfrac{a}{2}+(2-a)t\Leftrightarrow 2x=a+2(2-a)t\Leftrightarrow t=\dfrac{2x-a}{2(2-a)}$.

Bilan :

$$\boxed{G^{-1}(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-a}{2a} & \text{si } 0\le x<\dfrac{a}{2} \\ \dfrac{2x-a}{2(2-a)} & \text{si } \dfrac{a}{2}<x\le 1 \end{cases}}$$

d) Comme $X=G^{-1}(U)$, il suffit de calculer l'image par G^{-1} de la valeur prise par la fonction `hasard`, ce qui nécessite d'étudier deux cas, selon que `u` prend une valeur inférieure à $\dfrac{a}{2}$ ou pas.

On peut donc proposer dans un langage naturel :

```
Donnez une valeur pour a
Si u est inférieur ou égal à a/2  alors X=(2u-a)/(2a)
                                  sinon X=(2u-a)/(2(2-a))
Afficher X
```

6) a) • Z_n est un estimateur car c'est une fonction d'un échantillon de la loi de X, et cette fonction est indépendante du paramètre a que l'on veut estimer.

• Comme X possède une espérance, les variables X_k aussi, donc Z_n possède une espérance, et par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(Z_n)=1-\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=1-\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-a}{4}=1-\frac{4}{n}\times n\times\frac{1-a}{4}=1-(1-a)=a$$

Conclusion :

$$\boxed{Z_n \text{ est un estimateur sans biais de } a}$$

b) Comme Z_n est un estimateur sans biais de a, son risque quadratique $r_\theta(Z_n)$ est égal à $V(Z_n)$.

Par propriété de la variance, on a $V(Z_n)=\frac{16}{n^2}V\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)$, puis par mutuelle indépendance des variables X_k, on obtient : $V(Z_n)=\frac{16}{n^2}\sum_{k=1}^{n}V(X_k)=\frac{16}{n^2}\times\frac{1+6a-3a^2}{48}\times n$.

En simplifiant, on trouve :

$$\boxed{r_\theta(Z_n)=\frac{1+6a-3a^2}{3n}}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} r_\theta(Z_n)=0$, on en déduit (condition suffisante) que :

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } Z_n \text{ est un estimateur convergent de } a}$$

7) a) Comme les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, U_n suit la loi binomiale de paramètres n et $F_X(0)$, ce qui donne :

$$\boxed{U_n \text{ suit la loi } \mathcal{B}\left(n,\frac{a}{2}\right)}$$

b) On en déduit : $E(U_n)=\frac{na}{2}$, ce qui implique, par linéarité de l'espérance que $E\left(\frac{2}{n}U_n\right)=a$.

$$\boxed{V_n=\frac{2}{n}U_n \text{ est un estimateur sans biais de } a}$$

c) On a $V(U_n)=n\times\frac{a}{2}\times\left(1-\frac{a}{2}\right)=\frac{na(2-a)}{4}$.

On en déduit : $V(V_n)=\frac{4}{n^2}V(U_n)=\frac{4}{n^2}\times\frac{na(2-a)}{4}=\frac{a(2-a)}{n}$.

Comme V_n est sans biais, le risque quadratique $r_\theta(V_n)$ de V_n est donc : $r_\theta(V_n)=\frac{a(2-a)}{n}$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} r_\theta(V_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{a(2-a)}{n} = 0$, on peut conclure :

$$\boxed{V_n \text{ est un estimateur convergent de } a}$$

8) a) On a $1-a(2-a) = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0$. Par conséquent :

$$\boxed{a(2-a) \leq 1}$$

b) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable $V_n = \frac{2}{n}U_n$ s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P\left(\left|V_n - E(V_n)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(V_n)}{\varepsilon^2}$$

On sait que $E(V_n) = a$ et que $V(V_n) = \frac{a(2-a)}{n}$ donc finalement :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ P\left(\left|V_n - a\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{a(2-a)}{n\varepsilon^2}}$$

Comme $a(2-a) \leq 1$, on peut prolonger :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P\left(\left|V_n - a\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

c) On en déduit : $\forall \varepsilon > 0,\ P\left(\left|V_n - a\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$.

Comme $\left(\left|V_n - a\right| < \varepsilon\right) \subset \left(\left|V_n - a\right| \leq \varepsilon\right)$, on obtient, par croissance de la probabilité :

$$\forall \varepsilon > 0,\ P\left(\left|V_n - a\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

On sait que $\left|V_n - a\right| = \left|a - V_n\right|$ donc on peut aussi écrire $P\left(\left|a - V_n\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$, soit :

$$P\left(-\varepsilon \leq a - V_n \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

Finalement :

$$\boxed{P\left(V_n - \varepsilon \leq a \leq V_n + \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}}$$

d) On peut ainsi affirmer que l'intervalle $\left[V_n - \varepsilon, V_n + \varepsilon\right]$ est un intervalle de confiance pour a, avec un niveau de confiance au moins égal à $1 - \frac{1}{n\varepsilon^2}$.

Pour finir, il suffit de choisir $\varepsilon = \frac{1}{20}$, ce qui donne :

$$P\left(V_n - \frac{1}{20} \leq a \leq V_n + \frac{1}{20}\right) \geq 1 - \frac{400}{n}$$

Avec $n = 8000$, on obtient :

$$P\left(V_n - \frac{1}{20} \leq a \leq V_n + \frac{1}{20}\right) \geq 1 - \frac{1}{20}$$

Comme $1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}=\frac{95}{100}$, on peut conclure que $\left[V_n-\frac{1}{20}, V_n+\frac{1}{20}\right]$ est un intervalle de confiance pour a, avec un niveau de confiance au moins égal à 95%.

ADMISSION SUR TITRES EN PREMIERE ANNEE

RAPPORT DE CORRECTION 2018

Epreuve de MATHEMATIQUES

Présentation de l'épreuve.
L'épreuve, longue comme d'habitude, comportait trois exercices, ce qui permettait de juger les candidats sur la presque totalité du programme de l'épreuve : algèbre linéaire, analyse et probabilités. Les correcteurs ont trouvé le sujet adapté et très sélectif (des questions faciles mais aussi des questions très difficiles) tout en respectant scrupuleusement le programme.

- L'exercice 1, portant sur le programme d'analyse, proposait l'étude de l'intégrale $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{nx} dx$, et à la fin, demandait d'établir l'équivalent : $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

- L'exercice 2, portant sur le programme d'algèbre, considérait une matrice A diagonalisable à valeurs propres 2 à 2 distinctes, et avait pour but de montrer que l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe la matrice $f(M) = AM - MA$, était diagonalisable.

- L'exercice 3, portant sur le programme de probabilités, avait pour objectif principal d'estimer, ponctuellement et par intervalle de confiance, le paramètre a, élément de $[0,2]$, de la loi suivie par une variable aléatoire X dont une densité était donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } -\dfrac{1}{2} \leq x \leq 0 \\ 2-a & \text{si } 0 < x \leq \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Statistiques.
Pour les 611 candidats ayant composé :
- La moyenne obtenue à cette épreuve est de 10,70 sur 20, un peu supérieure à celle de l'année dernière (plus 0,6 point).
- L'écart-type est environ égal à 5,47 (0,23 point en dessous de l'année dernière).
- La médiane est, quant à elle, égale à 10,50 (0,5 point en dessous de celle de l'année dernière).
- 13,9 % des candidats obtiennent une note inférieure ou égale à 4, presque comme l'année dernière (7% ont une note inférieure ou égale à 2, ce qui représente 2,4 points de plus que l'année dernière).
- 28,4 % des candidats ont entre 8 et 12 (2,8 points de moins que l'année dernière).
- 12,9 % des candidats obtiennent une note supérieure ou égale à 18 (5,8 points de plus que l'année dernière, ce qui rapproche des étiages des années 2015 et 2016).

Analyse des copies.
Les correcteurs notent une fois encore que le niveau est très hétérogène, ceci étant, comme d'habitude, dû aux origines scolaires et universitaires diverses des candidats.
Mis à part, d'un côté, quelques très brillants candidats ayant des connaissances bien supérieures à celles exigées par le programme, et de l'autre, un certain nombre de candidats très mal préparés ayant

des notes extrêmement basses (ces candidats connaissent souvent les concepts, parfois pas, mais ne les maîtrisent pas du tout), les correcteurs trouvent l'ensemble d'un niveau honorable, un peu supérieur à celui de l'année passée, tout en regrettant que de très nombreux candidats, certainement par manque de temps pour préparer cette épreuve, aient fait l'impasse sur les probabilités. Les notes sont plus "resserrées" que lors des sessions précédentes (il y a moins de très mauvaises notes mais aussi, moins de très bonnes notes).

En ce qui concerne la crédibilité des copies, signalons les quelques points suivants pour lesquels elle est mise à mal :

Exercice 1

- Avoir trouvé $f'(x)=1+x-\dfrac{1}{1-x}$, ce qui était correct, et conclure directement que $f'(x)$ est négatif n'a jamais été accepté.
- Faire un développement limité pour prouver une inégalité pour tout x de $[0,1]$ montre une réelle incompréhension de l'aspect local d'un développement limité.
- Avoir démontré que I_1 est inférieur ou égal à I_0 ne permet en aucun cas de conclure que la suite (I_n) est décroissante.
- Faire une récurrence sur une suite qui n'est pas définie par récurrence est toujours voué à l'échec.
- Établir une inégalité valable pour tout x de $[0,1-\sigma^2]$ puis intégrer de 0 à 1 est une escroquerie que l'on ne peut pas pardonner !

Exercice 2

- Peu de candidats sont crédibles pour établir que $u(M)_{i,j}=(d_i-d_j)m_{i,j}$, certains se sont même rabattus sur un exemple avec des matrices d'ordre 2, de nombreux autres se sont certainement inspirés d'un résultat postérieur.
- De nombreux candidats semblent penser que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont toujours supplémentaires ! C'était le cas ici, mais ce n'est pas une vérité.
- Les mêmes candidats concluent que puisque, d'une part on a $\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et d'autre part $\mathrm{Ker}(f)\oplus E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $E=\mathrm{Im}(f)$…
- Ayant l'égalité $u(E_{i,j})=(d_i-d_j)E_{i,j}$, pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, beaucoup ont pensé que u possédait n^2 valeurs propres distinctes. Il en a été de même avec l'égalité $f(E_{i,j})=(d_i-d_j)PE_{i,j}P^{-1}$ pour une majorité de ceux (peu nombreux) qui ont pu établir cette dernière égalité.

Exercice 3

- Écrire que f est continue sur $\mathbb{R}$ a été sanctionné : ce n'est visiblement pas le cas…
- Trop peu de candidats vérifient que la fonction de répartition trouvée est plausible : ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ doivent être respectivement égales à 0 et 1, et en tant que fonction de répartition d'une variable à densité, elle se doit notamment d'être continue en –1/2, 0 et 1/2 : ces petites vérifications auraient évité des catastrophes dans quelques unes des questions qui suivaient…
- Beaucoup se sont contentés de vérifier que la fonction G^{-1} donnée par l'énoncé était bien la bijection réciproque de G en calculant $G^{-1}(G(x))$ ou $G(G^{-1}(x))$, mais en ne plaçant pas x dans les bons intervalles, ce qui n'a pas été validé.
- Ne pas avoir le temps de montrer que $a(2-a)\le 1$ est très dommageable : ce sont des points faciles à prendre qui ne sont pas pris. Plus grave est de ne pas savoir faire (alors qu'on est face à une identité remarquable) !
- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev n'est pas connue de tous, loin de là.

Conclusion.
L’épreuve a permis de repérer et de mettre en valeur les candidats les mieux préparés (il y en a de très bons) et les plus aptes à trouver leur place dans des études exigeantes qui nécessitent rigueur et honnêteté intellectuelle.

Nous conseillons, comme par le passé, aux futurs candidats de se préparer d’une façon complète, en essayant de ne négliger aucun point du programme : les trois "compartiments" de ce programme (analyse, algèbre linéaire et probabilités) sont essentiels pour une bonne continuation des études à l'EDHEC.
Pour terminer, les correcteurs rappellent que les candidats doivent s’en tenir strictement aux termes du programme de cette épreuve (disponible sur le site de l’EDHEC).